Parimutuel Betting

Note by Émile Borel

Translated by Marco Ottaviani

Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences (Proceedings of the French Academy of Sciences)

1938, 2nd Semester, Volume 207, Number 3, Pages 197-200

Session: Monday, 18 July 1938

The game of parimutuel betting poses some interesting probability problems.

1. We first study a simple case in which this game is practiced on random events for which the probabilities are well known. An example is the probability of obtaining a number determined by two dice.

Let us propose to a hundred bettors the following game: everyone bets a certain sum on a number from 2 to 12; each player's stake and number remain undisclosed to the other players. The dice are then thrown, and if they show the number 8, the players who placed a bet on 8 share the stakes, in proportion to their bets. If no player bet on 8, the throw is null and the dice are thrown again.

The game is equitable if the total number of bets placed on each number is proportional to the probability of obtaining that number; but there is no reason a priori for this condition to be met. If the game is repeated a large number of times among the same players, the players could be tempted to try to use the results to change their bets; it is immediately clear, however, that if many of the players were to let themselves be influenced the same way by the results, the game would actually become advantageous for the other bettors, who bet in the opposite direction.

For the game to be on average equitable, each player, after having determined his stake, must bet on each number with a probability equal to the probability of that number being thrown; for example, he can throw two dice and bet on the sum of the numbers he throws. Another method consists of drawing a random number from 2 to 12 with equal probabilities, and then making the bets proportional to the probability of obtaining the number on which the player must bet. If some of the players, G, adopt these methods, while others, G', do not, players G will beat players G' in the long run.

2. Suppose now that, in the game described above, one of the players, J, were allowed to bet last, after having learned what bets were placed by the other players. A simple computation can determine how he must bet to obtain the highest mathematical expectation.

An interesting case is one in which J has already placed a bet in a way that yields a positive mathematical expectation; it is then possible that by increasing his bet on the same number, he would decrease his mathematical expectation, whereas a new player, J', not yet having placed any bets, would obtain a positive mathematical expectation by betting an appropriate sum on the same number. The rule that determines the most favorable bet for J can be stated very simply: let a be the total bets placed by the other players on number α, and let A be the total bets on α that make the game equitable for the players who bet on α, without changing the other bets; J must bet an amount equal to $x - a$ such that the total amount, x, bet on α is equal to the geometric mean of a and A.

If a large number of players are allowed to bet one after the other, with each of them knowing the preceding bets, and if they follow this rule, the game will become asymptotically equitable.

3. Let us now consider the particularly interesting case in which bettors have different opinions regarding the probabilities of the random events on which they are betting; this is notably the case with all competitive sports. The following is a very simple example of a case with only two possible outcomes on which players can bet.

Let us suppose that two bettors, P and P', have each bet the same sum, a, on outcome A, to which they both attribute probability p, whereas two other bettors, Q and Q', have each bet the same sum, b, on the opposite event, B, to which they both attribute probability q, which is greater than $1-p$. If

(1) $$p \leq \frac{2a}{b+2a}, \qquad q \leq \frac{2b}{a+2b},$$

none of the four players is interested in increasing his bet if he is confident in his own evaluation of the probabilities. Let us examine the particular case in which

$$p = \frac{2a}{b+2a}, \qquad q = \frac{2b}{a+2b}.$$

The mathematical expectation of players P and P', *from their point of view*, is equal to $ab/(b+2a)$, whereas the mathematical expectation of players Q and Q', *from their point of view*, is equal to $ab/(a+2b)$.

If x is the *true* probability of event A, the mathematical expectation of P and P' is

$$E = bx - a(1-x),$$

whereas the mathematical expectation of Q and Q' is $-E$. It is worth noting that the probability of A for P and P' is equal to p, whereas for Q and Q', it is equal to $1-q$. The value of x at which E equals zero is intermediate between p and $1-q$; we have

$$p = \frac{2a}{b+2a}, \qquad x = \frac{a}{a+b}, \qquad 1-q = \frac{a}{a+2b}.$$

The fraction equal to x is obtained by dividing the sum of the numerators of fractions p and $1 - q$ by the sum of their denominators.

We can see through which mechanism, in certain cases, a betting equilibrium is established when bettors have different opinions on the probabilities. However, note that for a given p and q that satisfy condition $p+q>1$, it is not always possible to determine a and b in a way that satisfies inequalities (1); our assumptions must then be elaborated so that the equilibrium can be established.

4. Certain economic phenomena share the following aspect of the parimutuel game: if a player wants to secure an advantage, based on his own evaluation of probabilities, he cannot do so without lowering the mathematical expectations of those who speculate in the same direction. The study of these phenomena would be simplified by prior study of simple parimutuel–betting problems, generalizing what we have shown by way of example.

5. The discussion above assumes that one recognizes the notion of the probability of an individual event. This notion is contested by certain authors; I personally consider it to be one of the essential concepts of probability theory.

ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 18 JUILLET 1938.

PRÉSIDENCE DE M. AIMÉ COTTON.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. le **Ministre de l'Éducation Nationale** adresse ampliation du décret, en date du 7 juillet 1938, portant approbation de l'élection que l'Académie a faite de M. **Tullio Levi-Civita** pour occuper la place d'Associé étranger vacante par le décès de M. *George Ellery Hale*.

Il est donné lecture de ce décret.

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Sur le pari mutuel.* Note de M. **Émile Borel**.

Le jeu dit *pari mutuel* pose des problèmes intéressants de probabilités.

1. Étudions d'abord le cas simple où ce jeu serait pratiqué à propos d'événements aléatoires dont les probabilités sont bien connues. Tel est le cas pour les probabilités d'amener un point déterminé avec 2 dés.

Proposons à une centaine de parieurs le jeu suivant; chacun mise une certaine somme sur l'un des points 2, 3, ..., 11, 12, son enjeu et son choix restant secrets pour les autres joueurs. On jette les dés, et s'ils marquent 8, les joueurs qui ont misé sur 8 se partagent les enjeux, proportionnellement à leurs mises. Si aucun des joueurs n'avait misé 8, le coup serait nul et l'on jetterait à nouveau les dés.

Ce jeu serait équitable, si le total des mises sur chaque point était proportionnel à la probabilité d'amener ce point; mais on n'aperçoit aucune raison *a priori* pour que cette condition se réalise d'elle-même. Si le jeu se

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, T. 207 (1938) 197-200.

répète un grand nombre de fois entre les mêmes joueurs, ceux-ci peuvent être tentés d'essayer de mettre à profit les résultats constatés pour varier leurs paris; mais on aperçoit immédiatement que, si beaucoup d'entre eux se laissent influencer de la même manière par ces résultats, le jeu deviendra, au contraire, avantageux pour les autres parieurs qui auront misé en sens inverse.

Pour que le jeu soit en moyenne équitable, il faudrait que chaque joueur, ayant fixé d'avance sa mise, parie sur chacun des points avec une probabilité égale à la probabilité de ce point; il peut, par exemple, jeter deux dés et parier pour le total qu'il obtient. Une autre méthode consisterait à tirer au sort, avec des probabilités égales, les points de 2 à 12, et à proportionner ensuite la mise à la probabilité du point sur lequel on doit miser. Si un certain nombre de joueurs G adoptent ces méthodes, tandis que les autres joueurs G′ ne les adoptent pas, les joueurs G gagneront à la longue les joueurs G′.

2. Supposons maintenant que, dans le jeu précédent, un des joueurs J soit autorisé à miser le dernier, après avoir eu connaissance des paris des autres joueurs. Un calcul élémentaire permet de déterminer comment il doit parier pour avoir l'espérance mathématique maximum.

Un cas intéressant est celui où J a déjà misé dans des conditions qui lui donnent une espérance mathématique positive; il peut alors arriver qu'en augmentant sa mise sur le même point, il diminue son espérance mathématique, tandis qu'un nouveau joueur J′, n'ayant pas encore misé, obtiendrait une espérance mathématique positive en misant sur le même point une somme convenable. La règle qui détermine la mise la plus favorable pour J peut être énoncée très simplement; soit a le total des mises des autres joueurs sur un certain point α, et A le total des mises sur α qui rend le jeu équitable, pour les joueurs qui misent sur α, les autres mises n'étant pas modifiées; J doit miser $x - a$, de manière que la mise totale x sur α soit la moyenne géométrique de a et de A.

Si un grand nombre de joueurs sont successivement autorisés à miser, chacun d'eux connaissant les mises précédentes, et s'ils suivent cette règle, le jeu deviendra asymptotiquement équitable.

3. Abordons maintenant le cas véritablement intéressant, celui où les parieurs ont des opinions différentes sur les probabilités des événements aléatoires sur lesquels ils parient; c'est le cas, notamment, de toutes les compétitions sportives. Je me contenterai de donner un exemple particulièrement simple, où les paris ne portent que sur deux événements seuls possibles.

Admettons que deux parieurs P et P′ aient misé chacun une même somme a sur un événement A, auquel ils attribuent l'un et l'autre la probabilité p, tandis que deux autres parieurs Q et Q′ ont misé chacun une même somme b sur l'événement contraire B, auquel ils attribuent tous deux la probabilité q, supérieure à $1-p$. Si l'on a

$$(1) \qquad p \leqq \frac{2a}{b+2a}, \qquad q \leqq \frac{2b}{a+2b},$$

aucun des quatre joueurs n'a intérêt à augmenter sa mise, s'il a confiance dans son évaluation personnelle de la probabilité. Examinons le cas particulier où l'on a

$$p = \frac{2a}{b+2a}, \qquad q = \frac{2b}{a+2b}.$$

L'espérance mathématique de chacun des joueurs P et P′, *à leur point de vue*, est $ab/(b+2a)$, tandis que l'espérance mathématique des joueurs Q et Q′, *à leur point de vue*, est $ab/(a+2b)$.

Si l'on désigne par x la *véritable* probabilité de l'événement A, l'espérance mathématique de P et P′ est

$$E = bx - a(1-x),$$

tandis que l'espérance mathématique de Q et de Q′ est $-E$. On peut remarquer que la probabilité de A est, pour P et P′, égale à p, tandis que pour Q et Q′, elle est égale à $1-q$. La valeur x qui annule E est intermédiaire entre p et $1-q$; on a

$$p = \frac{2a}{b+2a}, \qquad x = \frac{a}{a+b}, \qquad 1-q = \frac{a}{a+2b}.$$

La fraction égale à x s'obtient en divisant la somme des numérateurs des fractions p et $1-q$ par la somme de leurs dénominateurs.

On voit par quel mécanisme peut s'établir, dans certains cas, un équilibre des paris lorsque les parieurs ont des opinions différentes sur les probabilités. Observons cependant que lorsqu'on donne p et q satisfaisant à la seule condition $p+q>1$, il n'est pas toujours possible de déterminer a et b de manière à satisfaire aux inégalités (1); il faudrait alors compliquer nos hypothèses pour que l'équilibre puisse s'établir.

4. Certains phénomènes économiques ont ceci de commun avec le jeu du pari mutuel que celui qui veut s'assurer un avantage, d'après ses évaluations personnelles des probabilités, ne peut y parvenir qu'en diminuant

les espérances mathématiques de ceux qui spéculent dans le même sens que lui. L'étude de ces phénomènes serait facilitée par l'étude préalable de problèmes simples de pari mutuel, généralisant ceux que nous avons indiqués à titre d'exemple.

5. Les considérations précédentes supposent que l'on admet la notion de la probabilité d'un cas isolé. Cette notion est contestée par certains auteurs; je la considère, pour ma part, comme une des notions essentielles de la théorie des probabilités.

GÉOLOGIE. — *Existence d'un sable calcaire grossier à la base de la craie phosphatée sénonienne de la Picardie.* Note de M. Lucien Cayeux.

Lorsque l'exploitation des craies phosphatées de la Somme était en pleine activité, j'ai observé, à la base de la craie phosphatée à *Belemnitella quadrata*, près de l'ancienne église de Beauval, un accident lithologique très instructif, dont l'existence est restée inconnue jusqu'à présent. Il consistait en un dépôt lenticulaire, mesurant seulement quelques mètres de longueur, et tout au plus 25^{cm} d'épaisseur, composé d'un sable calcaire très grossier, partiellement agglutiné en un produit présentant de grandes analogies d'aspect avec certains de nos calcaires, dits pisolithiques, d'âge montien. Le sable en question renferme, en quantité, des dents de *Squales* et quelques coquilles entières ou fragmentaires se rapportant à des *Pectens* etc. Sur ses cassures miroitantes, la roche cohérente trahit la présence d'une foule de restes d'*Échinodermes*. Bref, il s'agit d'un dépôt de nature très aberrante, eu égard à son intercalation entre la craie blanche à *Micraster cor anguinum*, que l'on sait très fine et pure, et la craie phosphatée à *Belemnitella quadrata*.

Au microscope, le dépôt est à base de restes d'*Échinodermes*, tellement répandus qu'ils se touchent très souvent. Tout ce qu'on peut dire quant à leur attribution, c'est qu'il y a parmi eux de nombreuses plaques d'*Oursins* et des piquants très clairsemés, témoignant par la variété de leurs sections de l'existence d'une série de genres distincts. Je crois pouvoir être affirmatif en ce qui touche la présence d'*Ophiures*. Celle des *Crinoïdes* est certaine, mais le nombre d'articles à leur rapporter est infime. Il s'y ajoute de loin en loin un fragment de *Brachiopode*, un tronçon de prisme d'*Inocérame*, un débris de *Bryozoaire*, un *Foraminifère*, un spicule de *Calcisponge* etc.

La plupart des restes d'*Échinodermes* sont brisés. Eux seuls, mais en