restrittiva di quella di Nash. Si è usata la solita nozione di equilibrio congetturale, facendo però certe ipotesi sulle informazioni a priori dei giocatori, che hanno imposto di eliminare tutte le congetture incompatibili con esse, cioè tutte le congetture di 1 che sostenevano gli equilibri "cattivi". In seguito verrà dato il nome di "equilibrio semi-sequenziale" agli equilibri congetturali che si ottengono quando ogni giocatore conosce il gioco Γ° e sa che gli altri giocatori conoscono Γ° e rispettano dei vincoli di razionalità consistenti nel comportarsi coerentemente con una strategia effettiva rispetto a Γ°.

Il motivo per cui l'insieme delle strategie effettive dipende dall'informazione iniziale è duplice.

1) Anzitutto va osservato che ogni strategia effettiva rispetto a una congettura ç_j è anche miopicamente razionale rispetto a ç_j. Poichè le informazioni a priori determinano quali congetture sono compatibili e quindi quali strategie miopicamente razionali sono almeno in prima istanza accettabili, anche l'insieme delle strategie effettive sarà in generale influenzato dalle informazioni a priori. In sintesi: $\Sigma_j^\bullet|y^\circ$ è incluso in $\Sigma_j^*|y^\circ := \cup_{\text{ç}\in \text{Ç}|y^\circ}\Sigma_j^*(\text{ç}_j)$, al variare di y° in generale varia $\text{Ç}_j|y^\circ$ e quindi variano anche $\Sigma_j^*|y^\circ$ e $\Sigma_j^\bullet|y^\circ$.

2) Inoltre y° determina quali nuove congetture sarebbero adottate di fronte a un'evidenza h falsificante. Si è visto con l'esempio 4.3 che la famiglia delle regole di apprendimento ammissibili (cioè coerenti) rispetto a y°, $L_j[y^\circ]$, può variare al variare di y° e di conseguenza varia l'insieme delle nuove congetture ç_h^L adottate in seguito all'informazione h (le ç_h^L sono per la precisione le nuove sottocogetture definite sulla forma decisionale estesa in h,δ_h); questo evidentemente influenza $\Sigma_j^\bullet|y^\circ$.

I due canali attravarso cui y° influenza $\Sigma_j^\bullet|y^\circ$ interagiscono in modo strano. Quanto più è forte l'informazione a priori, cioè quanto più è piccolo $\text{Ç}_j|y^\circ$, tanto più è ristretto l'insieme delle strategie miopicamente razionali, in cui è incluso quello delle strategie effettive. Ma se y° è tanto forte da permettere di prevedere che certi eventi non si verificheranno, le nuove congetture, che verrebbero virtualmente adottate a fronte di quegli eventi, non sarebbero in alcun modo vincolate dalla condizione (4.17) e ciò tende ad aumentare le strategie effettive rispetto a y^o. Il seguente esempio dovrebbe chiarire la questione.

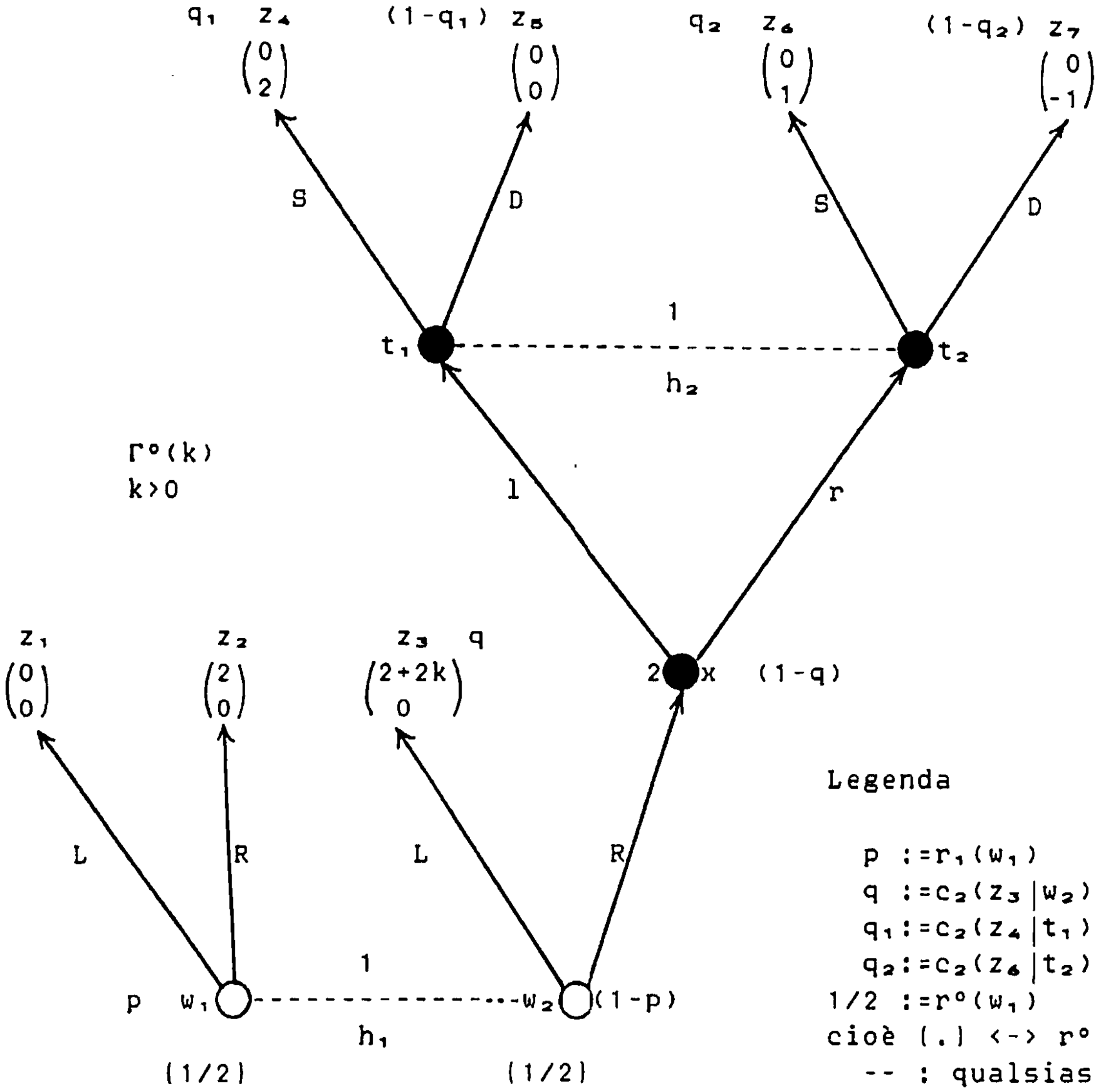
Esempio 4.4. Nella figura 15 è rappresentato un gioco, $\Gamma^o(k)$, con due giocatori, 1 e 2, in cui un valore della funzione di utilità di 1 è parametrizzato: $u_1(z_3)=2+2k$. Tutte le argomentazioni relative a questo gioco si basano sulla condizione che il parametro k sia strettamente positivo, ma per il resto k è un parametro libero e quindi le conclusioni sono valide per l'intera classe di giochi $\{\Gamma^o(k),\ k>0\}$, che ha la potenza del continuo. Il giocatore 1 è in una situazione tale per cui non può ricevere informazioni falsificanti durante il gioco, a meno che non sia certo (a torto) che lo stato di natura sia w_1 e scelga di conseguenza l'azione R. Ma anche in questo caso l'evidenza falsificante h_2 sarebbe irrilevante, perchè da h_2 1 ottiene un guadagno certo nullo. Quindi per lui l'unica scelta rilevante è quella iniziale tra R e L e questa scelta dipende da quale stato di natura egli ritiene più probabile. Per il giocatore 1 le strategie effettive coincidono con quelle razionali rispetto a ogni informazione iniziale e quindi risulta isolato il "canale d'influenza" di cui al punto 1). In particolare l'unica informazione iniziale rilevante per 1 è la distribuzione degli stati di natura r^o. Se egli non la conosce, perchè la sua informazione iniziale consiste nella sola informazione personale completa, allora sceglierà (o almeno potrebbe scegliere) R se vale la condizione

$$p/(1-p)\geq 1+k \quad \text{(p è la prob. soggettiva di } w_1\text{)},$$

quindi (R,S) e (R,D) sono strategie pure effettive rispetto a questa scarsa informazione iniziale. Se invece 1 possiede un'informazione completa (cioè usa la distribuzione degenere $\mu_1|\Gamma^o(k)$) a maggior ragione conosce r^o e sa che la probabilità di w_1 è del 50%. In questo caso p=1/2 e, essendo k positivo, la suddetta condizione è violata; ne consegue che l'unica strategia effettiva rispetto a $\Gamma^o(k)$ (e anche rispetto a r^o) è la strategia pura L, che garantisce un guadagno atteso maggiore rispetto a qualsiasi altra strategia (L è una strategia strettamente dominante per 1).

La situazione di 2 è in un certo senso opposta a quella

Rapporti tra informazioni a priori e strategie effettive.



Legenda

$p := r_1(w_1)$
$q := c_2(z_3 | w_2)$
$q_1 := c_2(z_4 | t_1)$
$q_2 := c_2(z_6 | t_2)$
$1/2 := r^\circ(w_1)$
cioè (.) <-> r°
-- : qualsiasi

Str. Gioc.	Strat.eff.(rispetto a inf.pers.completa)	Strat.effettive rispetto a $\Gamma^\circ(k)$	Strat.effettive risp. a $\Sigma_J^* \| \Gamma^\circ(k)$
	h_1 h_2 cong.iniz.	h_1 h_2 cong.in.	
1	R -- $p/(1-p)>1+k$		
	L -- $p/(1-p)<1+k$	L -- $p=1/2$	idem
	(x) cong.iniz.	(x) cong.iniz.	(x) cong.in. $c_{(x)}^L$
2	-- --	1 $q_1=q_2$	-- $q_1=q_2$ --
		q : --	$q=1$

figura 15

di 1: le uniche informazioni a priori per lui rilevanti sono quelle sul comportamento di 1, le informazioni sul gioco (in eccesso all'informazione personale completa) gli interessano solo per poter dare un contenuto concreto a quelle sul comportamento di 1. Se 2 dispone solo dell'informazione personale completa, qualsiasi congettura è possibile. In particolare 2 può credere che alla sua eventuale azione l segua certamente l'esito z_5 ($q_1=0$), in cui non guadagna nulla, e che all'azione r segua certamente l'esito z_4 ($q_2=1$), in cui guadagna 1. Questa congettura ($q_1=0$, $q_2=1$) gli farà apparire razionale l'azione r nel caso che gli tocchi giocare (cioè se riceve l'informazione $\{x\}$). Naturalmente si tratta di una congettura incompatibile con la struttura dell'informazione (H°,α°), ma si sta assumendo che 2 non la conosca e quindi non ci sono ragioni per escluderla. Si può facilmente capire che se 2 non dispone di qualche informazione a priori in più, qualsiasi sua strategia può essere effettiva. Se invece 2 è completamente informato sul gioco, ogni sua congettura iniziale sarà tale che $q_1=q_2$, perchè 1 non può distinguere tra i due nodi t_1 e t_2. Da ciò 2 deduce che $(x;l)$ è una strategia dominante e, cosa molto più importante, che l è una sottostrategia strettamente dominante rispetto alla forma decisionale estesa $\delta_{\{x\}}$. Quindi se 2 riceve l'informazione $\{x\}$ razionalmente sceglie l e l'unica sua strategia effettiva rispetto a $\Gamma^\circ(k)$ è $(x;l)$. Ma cosa succede se si assegna a 2 l'informazione a priori secondo cui 1 è razionale e conosce il gioco? In base alla notazione introdotta nel paragrafo 4.1 tale informazione si rappresenta così:

$$B_2{}'(\Gamma) \text{ incluso in } S_1{}^*|\Gamma \text{ incluso in } S_1[\Gamma]$$

Tenendo conto del fatto che 2 è anche completamente informato, si pone $\Gamma=\Gamma^\circ(k)$, ottenendo $\Sigma_1{}^*|\Gamma^\circ(k)=\{(L,S),(L,D)\}$, e da ciò si deduce che il nodo x non sarà mai raggiunto ($q=1$). Cosa penserebbe 2 se ricevesse durante il gioco l'informazione $\{x\}$? Potrebbe pensare che 1 ha sbagliato e in questo caso sceglierebbe comunque l'azione l. Ma potrebbe anche pensare che in realtà il gioco non è $\Gamma^\circ(k)$ con $k>0$, che k è qualche numero negativo oppure zero. Cosa gli vieta allora di pensare che altre parti di $\Gamma^\circ(k)$ siano erronee, in particolare cosa gli vieta di pensare che non esista un insieme d'informazione

$H^o(t_1)=H^o(t_2)=h_2$? Forse qualche principio di minimizzazione del cambiamento delle congetture di fronte a una evidenza falsificante? La posizione qui adottata è che se un'informazione a priori venisse falsificata (condizionale controfattuale, perchè le informazioni a priori sono oggettive) l'agente coinvolto potrebbe adottare qualsiasi nuova congettura che assegni probabilità positiva all'informazione falsificante. E' questo il significato delle (4.14)-(4.17). Nel caso in esame qualsiasi nuova sottocongettura $\varsigma_{(x)}{}^L$ sarebbe ammissibile (derivata da una regola d'apprendimento coerente) e quindi l'insieme delle strategie effettive $\Sigma_2{}^*|(\Sigma_1{}^*|\Gamma^o(k))$ sarebbe coincidente con Σ_2 lo spazio delle strategie di 2, come se 2 non avesse alcuna informazione a priori in eccesso all'informazione personale completa. Si ricordi che in realtà l'unico giocatore che dovrebbe essere interessato alle strategie effettive di 2 è 1, ma il gioco è tale che 1 è del tutto indifferente al comportamento di 2 e si preoccupa solo degli stati di natura. L'indeterminazione nelle strategie effettive di 2 non ha in questo caso nessuna conseguenza. L'unico esito compatibile col comportamento razionale, quando l'informazione è completa, è z_3.

Come qualsiasi utilità attesa in giochi finiti, anche $E(u_j|h,\varsigma_h{}^L,\sigma_h)$ è una funzione continua in σ_h definita su un insieme compatto; il teorema di Weierstrass ci assicura perciò che tale funzione ammette almeno un punto di massimo. Ciò è sufficiente per dimostrare che $\Sigma_j{}^*$ non è vuoto. Infatti, per una congettura e una regola d'apprendimento assegnate, è sempre possibile costruire una strategia effettiva selezionando per ogni $h\in H(X_j)$ una strategia ottimale σ_h in modo tale che, se $Z(h)$ è incluso in $Z(h')$, σ_h sia una sottostrategia di $\sigma_{h'}$, cioè coincida con $\sigma_{h'}$ su δ_h. Naturalmente questa condizione può essere sempre soddisfatta perchè consente di massimizzare gli addendi di $E(u_j|h'...)$ dipendenti dagli $z\in Z(h)$ senza influenzare gli altri.

E' opportuno formalizzare quanto sopra con un teorema, anche perchè la dimostrazione di esistenza di una strategia effettiva rispetto a una congettura ς_j assegnata è di tipo costruttivo e può essere interpretata come un caso di "backword induction".

Teorema 4.5. Per ogni informazione a priori y^o, ogni congettura $\varsigma_j \in \mathrm{Ç}_j | y^o$ e ogni regola d'apprendimento coerente $L_j \in L_j[y^o]$ $(j \in I)$ è vero quanto segue:

a) dati $h, h' \in H(x_j)$ tali che $Z(h')$ sia incluso in $Z(h)$, se $\sigma_h{}^* \in \mathrm{Argmax}\ E(u_j | h, \varsigma_h{}^L, \sigma_h)$, $\sigma_{h'}{}^o \in \mathrm{Argmax}\ E(u_j | h', \varsigma_{h'}{}^L, \sigma_{h'})$ e, per $p_1(t) \in X_j \cap (T_h \setminus T_{h'})$, $\sigma_h{}^*[\alpha(t)] = \sigma_h{}^o[\alpha(t)]$, allora $\sigma_h{}^o \in \mathrm{Argmax}\ E(u_j | h, \varsigma_h{}^L, \sigma_h)$;

b) esiste una strategia effettiva rispetto a ς_j e y^o, $\sigma_j{}^*$, tale che per ogni $h \in H(X_j)$ $\sigma_h{}^* \in \mathrm{Argmax}\ E(u_j | h, \varsigma_h{}^L, \sigma_h)$.

Il teorema afferma nel punto a) che se una strategia è miopicamente razionale su δ_h e la si modifica in modo tale da renderla miopicamente razionale su $\delta_{h'}$ $(h<h')$ si ottiene un'altra strategia miopicamente razionale su δ_h; nel punto b) si afferma sostanzialmente che $\Sigma_j{}^*(\varsigma_j) | y^o$ non è vuoto. La possibilità di definire la razionalità miope, cioè relativa ad una certa congettura, per qualsiasi insieme d'informazione h, è dovuta all'uso della regola d'apprendimento, che definisce su ogni h una congettura compatibile con h stesso.

Dimostrazione. a) Se $\Pr(Z(h') | h, \varsigma_h{}^L, \sigma_h{}^*) = 0$, allora i due valori attesi calcolati per $\sigma_h{}^*$ $\sigma_h{}^o$ coincidono, cioè

$$E(u_j | h, \varsigma_h{}^L, \sigma_h{}^*) = E(u_j | h, \varsigma_h{}^L, \sigma_h{}^o)$$

e quindi vale la tesi. Se $\Pr(Z(h') | h, \varsigma_h{}^L, \sigma_h{}^*) > 0$, allora $\varsigma_{h'}{}^L$ è la restrizione di $\varsigma_h{}^L$ su $\delta_{h'}$ e quindi

$$E(u_j | h, \varsigma_h{}^L, \sigma_h{}^*) = \Sigma_{z \in Z(h) \setminus Z(h')} \Pr(z | h, \varsigma_h{}^L, \sigma_h{}^*) u_j(z) + \\ + \Pr(Z(h') | h, \varsigma_h{}^L, \sigma_h{}^*) E(u_j | h', \varsigma_{h'}{}^L, \sigma_{h'}{}^*).$$

Poichè $\sigma_h{}^*$ e $\sigma_h{}^o$ coincidono al di fuori di $\delta_{h'}$, i due valori attesi subordinati ad h e calcolati rispetto alle due strategie possono essere diversi solo se lo sono i due valori attesi subordinati ad h'. Ma poichè $\sigma_{h'}{}^o$ è massimizzante, quest'ultima condizione implicherebbe $E(u_j | h', \varsigma_{h'}{}^L, \sigma_{h'}{}^*) < E(u_j | h', \varsigma_{h'}{}^L, \sigma_{h'}{}^o)$ e questo contraddice l'ipotesi che $\sigma_h{}^*$ sia massimizzante su δ_h. Dunque la tesi vale in ogni caso.

b) Si definiscono in Z dei sottoinsiemi a due a due disgiunti $Z(h)$ $(h \in H(X_j))$ in modo tale che per ogni $Z(h)$ non esista un $h' \in H(X_j)$ per il quale $Z(h')$ sia incluso in $Z(h)$. Da ognuno di questi sottoinsiemi si sceglie un elemento. Siano z, z', z"...i nodi finali così selezionati. L'ipotesi di memoria perfetta implica che gli insiemi d'informazione di j possano essere parzialmente ordinati in modo da rispettare la relazione d'ordine tra i rispettivi elementi, cioè $h<h'$ se esistono $x\in h$ e $t\in h'$ tali che $x<t$. In particolare si ha che $h_2<h_1$ se e solo se $Z(h_1)$ è incluso in $Z(h_2)$ e inoltre vale uno solo uno dei tre casi seguenti:

- $Z(h_1)$ incluso in $Z(h_2)$,
- $Z(h_2)$ incluso in $Z(h_1)$,
- $Z(h_1)\cap Z(h_2)=\emptyset$.

Per un dato $z^o=z$, z', z"... si considera la famiglia degli insiemi d'informazione di j attraversati da $P(z^o)$. Per quanto detto sopra essa risulta totalmente ordinata, perciò si indicherà con $h(i,z^o)$ un generico h in tale famiglia, con $i\in\{1,2,...K^o\}$ (K^o è il numero di elementi della famiglia) e $i<k$ se $Z(h_i)$ è incluso in $Z(h_k)$. Dunque $h(1,z^o)$ corrisponde all'ultima mossa di j lungo il percorso $P(z^o)$.

La costruzione di $\sigma_j{}^*$ consiste nel procedere a ritroso partendo da ogni mossa finale e selezionando una sottostrategia (al primo passo semplicemente una combinazione lineare di azioni) che massimizza l'utilità attesa calcolata in base alla congettura rilevante in quel punto del gioco.

Dato $z^o=z$, z', z"..., si seleziona una combinazione lineare di azioni $\sigma_{h(1,z^o)}$ che massimizza $E(u_j|h(1,z^o),...)$. Le sottostrategie così selezionate si indicano con $\sigma_{[1]}$, $\sigma_{[1']}$, $\sigma_{[1'']}$ ... rispettivamente corrispondenti a z, z', z"... . Si passa poi a $h(2,z)$ e si seleziona una sottostrategia massimizzante $\sigma_{[2]}$ che coincide con $\sigma_{[1]}$ su $A(h(1,z))$ e con $\sigma_{[1^o]}$ su $A(h(1,z^o))$ per ogni z^o tale che $h(2,z)<h(1,z^o)$. Ciò è sempre possibile grazie al punto a) di questo lemma, il quale implica che la ricerca di $\sigma[2]$ equivale alla ricerca della combinazine lineare convessa di azioni in $A(h(2,z))$ che massimizza

$$\Sigma_{t\in Z(h(2,z))\setminus Z(h(1,z))}\Pr\{t|h(2,z),\varsigma_{h(2,z)}{}^L,...\}u_j(t)+$$
$$+\Pr\{Z(h(1,z)|h(2,z),\varsigma_{h(2,z)}{}^L,...\}E(u_j|h(1,z),\varsigma_{h(1,z)}{}^L,\sigma_{[1]})$$

(l'espressione è valida nel caso in cui $h(1,z)$ è l'unico successore di $h(2,z)$, altrimenti risulta più complicata, ma del tutto analoga). Si prosegue con $h(2,z')$; se $h(2,z')=h(2,z)$, si pone ovviamente $\sigma_{[2']}=\sigma_{[2]}$, altrimenti $\sigma_{[2']}$ viene selezionata in modo analogo a $\sigma_{[2]}$. Esauriti gli $h(2,.)$ si passa ad $h(3,z)$ e si scegli quella $\sigma_{[3]}$ massimizzante che coincide con $\sigma_{[2^\circ]}$ su $\delta_{h(2,z^\circ)}$ per ogni z° tale che $h(3,z)<h(2,z^\circ)$. Anche in questo caso ciò equivale a cercare una combinazione lineare convessa di azioni in $h(3,z)$, che massimizza una funzine lineare in tale combinazine. Si prosegue con $h(3,z')$; se $h(3,z')=h(3,z)$ si pone $\sigma_{[3']}=\sigma_{[3]}$, altrimenti si procede come sopra. Continuando in questo modo si arriva ad ottenere delle sottostrategie $\sigma_{[K]}$, $\sigma_{[K^\circ]}$... tali che gli insiemi $h(K,z)$, $h(K^\circ,z^\circ)$... sono a due a due disgiunti e senza predecessori. Tali sottostrategie formano la σ_j^* cercata. ■

Si osservi che per interpretare la "backword induction" sopra delineata come procedimento per costruire una strategia ottimale, si dovrebbe ipotizzare che j conosca la sua regola di apprendimento L_j, cioè che sia cosciente di avere un comportamento cognitivo determinato da tale regola. Questa ipotesi interpretativa è molto forte e non è necessaria per rendere significativo l'uso delle regole d'apprendimento che si farà in seguito[1]. Si enuncerà infatti un postulato di razionalità, nel quale sostanzialmente si afferma che una strategia effettiva permette di prevedere un comportamento plausibile da parte di un giocatore razionale e <u>non</u> che tale giocatore adotta intenzionalmente una strategia effettiva all'inizio del gioco. Va inoltre osservato che σ_j^* risulta essere una k-upla di combinazioni lineari convesse (azioni miste) σ^h, ognuna delle quali massimizza una funzione lineare in σ^h (gli h sono insiemi d'informazione di j e k è il numero di tali insiemi). σ_j^* è massimizzante anche su insiemi d'informazione sui quali è inutile massimizzare cioè su quelli che non appartengono a Rel σ_j^*, ma proprio per questo gode della proprietà suddetta che nel seguito sarà utile per fare confronti con le più recenti nozioni di equilibrio prodotte dalla letteratura. E' pertanto opportuno dare un nome a strategie di questo tipo.

Definizione 4.16. Se per una data $\varsigma_j\in \text{Ç}_j|y^\circ$ e una data informazione a priori y° esiste una regola d'apprendimento coerente $L_j\in Lj[y^\circ]$, tale che la strategia σ_j^* è miopicamente razionale su ogni δ_h, ovvero

$$E(u_j|h,\varsigma_h^L,\sigma_h^*)\geq E(u_j|h,\varsigma_h^L,\sigma_h),\quad \sigma_j\in\Sigma_j,\quad h\in H(X_j),$$

allora σ_j^* è detta supereffettiva rispetto a ς_j e y^o . L'insieme delle strategie supereffettive rispetto a ς_j e y^o si indica con $\Sigma_j^{**}(\varsigma_j)|y^o$. Una strategia è semplicemente detta supereffettiva rispetto a y^o se è supereffettiva rispetto a qualche $\varsigma_j \in Ç_j|y^o$. L'insieme delle strategie supereffettive rispetto a y^o si indica con $\Sigma_j^{**}|y^o := \cup_{\varsigma \in Ç|y^o} \Sigma_j^{**}(\varsigma_j)|y^o$. Quando $Ç_j|y^o = Ç_j$, l'indicazione di y^o si omettè e si usano le espressioni "strategia supereffettiva rispetto a ς_j" e strategia supereffettiva".

Dalle definizioni 4.15 e 4.16 segue immediatamente che $\Sigma_j^{**}(\varsigma_j)|y^o$ è incluso in $\Sigma_j^{*}(\varsigma_j)|y^o$ e $\Sigma_j^{**}|y^o$ è incluso in $\Sigma_j^{*}|y^o$.

Non si ripeterà mai abbastanza che la nozione di strategia effettiva di un giocatore j non è rilevante dal punto di vista di j, ma dal punto di vista degli altri giocatori, perchè la possono sfruttare per fare delle previsioni condizionate (si pensi al gioco della minaccia). In questo senso la nozione di strategia supereffettiva sembra essere ancora più forte. Una strategia supereffettiva di j non soltanto consente di prevedere il suo comportamento quando si accorge che la congettura in cui credeva è falsa, ma anche quando j si accorge di avere compiuto un errore nella attuazione della sua strategia. Solo un errore di questo genere infatti può permettere di raggiungere insiemi d'informazione irrilevanti ed è solo su questi insiemi che una strategia effettiva può differire da una supereffettiva. Tuttavia l'interpretazione secondo cui una strategia supereffettiva è un previsore migliore di una strategia soltanto effettiva è accettabile solo se si ammette che la forma estesa del gioco non descrive esattamente la struttura dell'interazione. Sarebbe infatti scorretto considerare come azione un evento che non può essere completamente controllato dall'agente. E' possibile immaginare che il gioco sia una descrizione solo approssimativa della realtà, perchè gli agenti controllano solo stocasticamente quegli eventi che la forma estesa definisce come azioni. Ci si può allora chiedere se gli equilibri definiti in base alla forma estesa sono robusti rispetto all'errore di approssimazione. Quelle nozioni di equilibrio che si basano sul presupposto che gli agenti possono commettere errori nella attuazione delle loro decisioni con una probabilità "piccola a piacere" sono plausibili e interessanti nell'ambito di un'indagine di questo tipo, cioè un'indagine sulla robustezza delle conclusioni raggiungibili con la teoria dei giochi. Da questo punto di vista sono assai interessanti le nozioni di "equilibrio perfetto" (Selten [1975]) e "equilibrio proprio" (Myerson [1978]); secondo il linguaggio qui adottato, entrambe definiscono degli equilibri congetturali Nash in strategie supereffettive (anche se non tutti gli equilibri di questo tipo) . Tuttavia se si assume che la forma estesa del gioco sia una descrizione corretta della realtà, non è ammissibile ricorrere a questi concetti di equilibrio per eliminare equilibri (di Nash) che intuitivamente si ritengono implausibili. Esiste però un modo più sottile e anche più corretto per rendere significativa la nozione di strategia supereffettiva. Si supponga che vi sia informazione completa e perfetta e che per ogni giocatore j la famiglia degli insiemi d'informazione rilevanti per qualche strategia effettiva rispetto a Γ° coincida con $H(X_j)$. In questo caso nessuna informazione $h \in H(X_i)$ sarebbe incompatibile con l'informazione a priori di i secondo cui il gioco è Γ°e gli altri giocatori adottano strategie effettive rispetto a Γ°. Se h falsificasse una congettura di i corrispondente ad una (n-1)-upla di strategie effettive degli altri giocatori, per la (4.17) i adotterebbe una nuova congettura compatibile con h corrispondente ad un'altra (n-1)-upla di strategie effettive. Ma se fin dall'inizio la congettura di ς_i corrispondesse ad una (n-1)-upla di strategie supereffettive i non avrebbe veramente bisogno di cambiare congettura, perchè la sottocongettura di ς_i definita su δ_h continuerebbe a essere un buon previsore (si noti che l'ipotesi di informazione perfetta garantisce che ς_i definisca una sottocongettura su δ_h perchè h ha un unico elemento e i sa in quale nodo si trova). Si supponga ora che i abbia adottato una strategia σ_i supereffettiva rispetto a ς_i e a Γ°. Poichè ς_i continua a essere un buon previsore e poichè σ_i è supereffettiva rispetto a ς_i,i non ha motivo di deviare da σ_i. Da tutto ciò consegue che una n-upla di strategie $\sigma \in \Sigma^{**}(\varsigma)|\Gamma^{\circ}$ con ς tale che ς_j corrisponde a una $\sigma^{j\prime} \in (\times_{i \in I \setminus (j)} \Sigma_i^{**}|\Gamma^{\circ})$ può essere un buon previsore dello svolgimento del gioco anche in disequilibrio. Infatti nessun giocatore razionale e dotato delle informazioni a priori suddette avrà incentivi a deviare dalla strategia adottata, anche se $(\underline{c},\sigma)$ non è un equilibrio decisionale e quindi qualche congettura può essere falsificata durante il gioco.

Le strategie effettive possiedono delle proprietà minimali, ma importanti, legate alla nozione di dominanza. Come si è visto nel paragrafo 2.3 la nozione di dominanza è definibile riferendosi alla sola forma normale e inoltre è basata su una relazione di disuguaglianza debole. Invece le strategie effettive sono direttamente legate a nozioni di dominanza forti, basate sulla forma estesa. Per capirlo è sufficiente pensare al solito gioco della figura 4. Quando il giocatore 2 si trova in x, cioè si accorge che 1 non ha ceduto alla sua minaccia, l'azione l di attuazione della minaccia è strettamente dominata dall'azione r, con cui si rinuncia all'attuazione, e questo implica che (x;l) non possa essere una strategia effettiva. Supponiamo ora di avere un gioco a mosse simultanee (o un gioco a rivelazione completa, che in virtù del lemma 3.1 è praticamente la stessa cosa), rappresentato da un forma normale uguale a quella del gioco di minaccia (si veda la figura 4). In entrambi i giochi la strategia l è dominata, ma in questo secondo gioco, al cotrario del primo, l è una strategia effettiva. Infatti, trattandosi di un gioco a mosse simultanee, le regole di apprendimento non hanno alcun ruolo e le strategie effettive coincidono con quelle miopicamente razionali; l è miopicamente razionale perchè massimizza l'utilità di 2 sotto l'ipotesi che 1 scelga L con probabilità unitaria e quindi è anche effettiva. Ciò si può interpretare dicendo che la simultaneità in questo secondo gioco impedisce a 1 di mettere 2 davanti al fatto compiuto e quindi , anche se 1 ritiene che 2 sia razionale, non c'è modo di escludere che venga scelta l.

Poichè l'insieme delle strategie effettive è relativo all'informazione a priori, è intuibile che anche le nozioni di dominanza ad esse collegate possono variare al variare di tale informazione. Per ora si considerano solo due tipi di informazione a priori: l'informazione personale completa, che in base alle definizioni 4.15 e 4.16 possiamo evitare di menzionare esplicitamente, e l'informazione completa. Finora non si è data una definizione di compatibilità con l'informazione completa, ma si tratta di una pura formalità. Infatti se un giocatore j dotato di una teoria θ_j è completamente informato, ciò significa che egli fa uso di una misura di probabilità degenere $\mu_j|\Gamma^o$ che attribuisce probabilità unitaria al punto Γ^o in G. Da ciò si può dedurre che $r_j=r^o$ (j conosce la distribuzione degli stati di natura) e che $\alpha^o(t)=\alpha^o(x)$ implica $c_j(t|p_1(t))=c_j(x|p_1(x))$. Infatti qundo è noto il gioco Γ^o, l'unica incertezza di j può derivare dal fatto che egli ritiene possibile più di una strategia di qualche altro giocatore k. Ma j assegna una distribuzione di probabilità $b_{jk}{}^{\Gamma*}$ sull'insieme delle strategie possibili di k, $B_j{}^k(\Gamma)^o$, e ciò che ne ottiene è del tutto equivalente a una strategia mista in forma normale di k. Poichè nei giochi con memoria perfetta è possibile trasformare una strategia mista in forma normale in una strategia mista comportamentale completamente equivalente, ne segue che la congettura così ottenuta asegnerà agli archi su cui sono definite le azioni degli altri giocatori le stesse probabilità che sono assegnate da qualche combinazione di strategie miste comportamentali (naturalmente la derivazione di questa proprietà è rigorosamente valida solo per gli archi x->t per i quali la probabilità di x, condizionata a una opportuna strategia σ_j per la quale $H(x)\epsilon Rel\ \sigma_j$, è positiva; ma l'estensione della proprietà a tutta la congettura è del tutto innocua, perchè non può influire sul comportamento di j).

Dall'ipotesi che j sia completamente informato si può quindi dedurre che, se $\alpha(t)=\alpha(t')$, allora $c_j(t|p_1(t))=$ $=c_j(t'|p_1(t'))$. Ma finchè non si assegnano a j delle informazioni sul comportamento altrui, cioè finchè l'insieme $B_j(\Gamma^o)$ resta completamente indeterminato, non è possibile alcuna ulteriore deduzione. E' quindi giustificata la seguente definizione.

Definizione 4.17. Si dice che una congettura ς_j è compatibile con l'informazione completa, o anche che è compatibile con Γ^o, se essa corrisponde a una combinazione di strategie altrui $\sigma^j\epsilon\Sigma^j$ ed è compatibile con con la distribuzione degli stati di natura r^o . Si dice che una n-upla di congetture ς è compatibile con Γ^o se per ogni j ς_j è compatibile con Γ^o . Gli insiemi delle congetture di j e delle n-uple di congettre compatibili con Γ^o si indicano rispettivamente con $Ç_j|\Gamma^o$ e $Ç|\Gamma^o$.

Seguiranno ora due definizioni di dominanza. La prima è più restrittiva, ma proprio per questo è rilevante nel caso più generale in cui si assume solo l'informazione personale completa. Secondo questa definizione una strategia domina uniformemente un'altra strategia se l'utilità attesa risultante dalla prima è maggiore di quella risultante dalla seconda per qualsiasi congettura. Si torni all'esempio 4.4 e alla figura 15. Quando il giocatore 2 si trova in x egli dispone di una strategia dominante nel senso tradizionle, cioè l; ma se 2 non conosce la struttura dell'informazione è ammissibile una congettura per la quale $q_1=0$ e $q_2=1$ e in base a questa congettura l'utilità attesa risultante da l è minore di quella risultante da r, quindi l domina r, ma non la domina uniformemente ed è quest'ultima nozione di dominanza quella rilevante quando si assume solo l'informazione personale completa. Si può inoltre notare che l domina r, ma non strettamente. Infatti se 1 sceglie L, 2 ottiene con entrambe la stessa utilità: 0. Ma ciò dipende dal fatto che in questo caso 2 non gioca. Quando 2 si trova in x e può effettivamente giocare, l domina strettamente r.

Definizione 4.18 (dominanza). Si dice che σ_j domina uniformemente σ_j' se per ogni congettura $\varsigma_j \in \Sigma_j$

$$E(u_j|\varsigma_j,\sigma_j) > E(u_j|\varsigma_j,\sigma_j');$$

ciò si indica con $\sigma_j \ {}_u{>} \sigma_j'$. Dato $h \in H(X_j)$, si dice che σ_j domina uniformemente σ_j' su δ_h se per ogni regola d'apprendimento coerente L_j e per ogni congettura (iniziale) ς_j

$$E(u_j|h,\varsigma_h^L,\sigma_h) > E(u_j|h,\varsigma_h^L,\sigma h');$$

ciò si indica con $\sigma_j \ {}_u{>}_h \ \sigma_j'$.

Si dice che σ_j domina σ_j' ($\sigma_j \geq \sigma_j'$) se per ogni $\sigma^j \in \Sigma^j$

$$E(u_j|\sigma_j,\sigma^j) \geq E(u_j|\sigma_j',\sigma^j)$$

e se esiste almeno una $\sigma^{j\circ}$, per la quale la disuguaglianza vale in senso stretto; σ_j domina σ_j' su δ_h ($\sigma_j \geq_h \sigma_j'$) se per ogni regola d'apprendimento coerente rispetto a Γ° $L_j \in L_j[\Gamma^\circ]$ e per ogni congettura (iniziale) compatibile con Γ° $\varsigma_j \in \Sigma_j|\Gamma^\circ$

$$E(u_j|h,\varsigma_h^L,\sigma_h) \geq E(u_j|h,\varsigma_h^L,\sigma_h')$$

e se esistono $L_j^\circ \in L_j[\Gamma^\circ]$ e $\varsigma_j^\circ \in \Sigma_j|\Gamma^\circ$ per le quali la disuguaglianza vale in senso stretto. Quando le ultime due disuguaglianze sono sempre valide in senso stretto, si dice che σ_j domina strettamente σ_j' e ciò si indica con $\sigma_j > \sigma_j'$ e $\sigma_j >_h \sigma_j$ rispettivamente. Una strategia σ_j^o si dice dominata in uno dei sensi specificati sopra se esiste almeno una strategia σ_j che la domina.

Si osservi che per la dominanza uniforme si è usata solo la disuguaglianza stretta ">". Il motivo è che, dal punto di vista qui adottato, si possono ricavare conclusioni interessanti solo quando valgono le relazioni di disuguaglianza stretta. Non si è però voluto usare la pura e semplice espressione "σ_j domina σ_j^*" in un senso diverso da quello tradizionale, quindi nel caso dell'informazione completa si è usato la relazione "≥" per la dominanza e si è usata l'espressione "domina strettamente", in conformità con l'uso comune, quando vale sempre la relazione ">". Il riferimento a congetture e regole d'apprendimento nel definire la dominanza su una forma decisionale δ_h è dovuto al fatto che bisogna disporre di una distribuzione di probabilità su h per calcolare un valore atteso in h e si era già messa a punto in precedenza una notazione adatta. Si ricordi però che le congetture in questione corrispondono sempre a strategie altrui. Con opprtune definizioni si sarebbe potuto esprimere i concetti di dominanza e dominanza stretta su δ_h solo in termini di strategie e sistemi di credenze (si veda la definizione 4.12).

Il collegamento tra i concetti di dominanza e le strategie effettive è intuibile: se una strategia è uniformemente dominata non può essere effettiva rispetto ad alcuna informazione a priori che contenga almeno l'informazione personale completa; se una strategia è strettamente dominata non può essere effettiva rispetto all'informazione completa e ciò è ancora vero se detta strategia è strettamente dominata su una forma decisionale estesa in h δ_h, purchè h sia rilevante. Queste sono conseguenze banali e immediate delle definizioni 4.15 e 4.18, saranno perciò formalmente enunciate come corollario.

Corollario 4.2. Se una strategia σ_j è uniformemente dominata, allora σ_j non è effettiva $(\sigma_j \in (\Sigma_j \setminus \Sigma_j^*))$. Se σ_j è strettamente dominata, allora σ_j non è effettiva rispetto all'informazione completa $(\sigma_j \in (\Sigma_j \setminus \Sigma_j^* | \Gamma^o)$. Se

σ_j è strettamente dominata su δ_h e $h\epsilon Rel\ \sigma_j$, allora σ_j non è effettiva rispetto a Γ^o.

Dimostrazione. Si dimostra solo l'ultima proposizione che è forse meno immediata. Se h è rilevante per σ_j ($h\epsilon Rel\ \sigma_j$) e se se σ_j è effettiva rispetto a Γ^o, dalla def. 4.15 segue che esistono $\varsigma_j \epsilon \Sigma_j | \Gamma^o$ e $L_j \epsilon L_j[\Gamma^o]$ tali che

$$E(u_j | h, \varsigma_h^L, \sigma_h) \geq E(u_j | h, \varsigma_h^L, \sigma_{h'}),\ \sigma_j' \epsilon \Sigma j.$$

Ma poichè σ_j è strettamente dominata su δh, per la def. (4.18), esiste una σ_j^o che per ogni regola d'apprendimento coerente rispetto a Γ^o e per ogni congettura compatibile con Γ^o dà una utilità strettamente maggiore di quella data da σ_j, quindi

$$E(u_j | h, \varsigma_h^L, \sigma_h) < E(u_j | h, \varsigma_h^L, \sigma_h^o).$$

Poichè dall'ipotesi che σ_j sia effetiva segue una contraddizione, vale la tesi. ∎

Il corollario 4.2 è utile quando si esaminano casi particolari, perchè eliminando le strategie uniformemente o strettamente dominate è spesso possibile individuare gli insiemi di strategie effettive; ciò si è già potuto constatare analizzando i giochi rappresentati nelle figure 4, 14, 15.

La definizione delle strategie effettive permette di rienunciare il postulato di razionalità in una forma più "dinamica" e adatta per definire in cosa consistano le informazioni a priori sulla razionalità altrui.

Si ricordi che una azione mista σ^h è una distribuzione di probabilità sull'insieme delle azioni possibili in h, cioè σ^h:A(h)->[0,1] tale che $\Sigma_{a \epsilon A(h)} \sigma^h(a)=1$ (crf. paragrafo 3.3). Tenendo presente quanto sopra è possibile enunciare il postulato di razionalità come segue.

Postulato di razionalità. Ogni giocatore j, dotato all'inizio del gioco dell'informazione a priori y^o e di una congettura $\varsigma_j \epsilon \Sigma_j | y^o$, per ogni insieme d'informazione $h \epsilon H(X_j)$ sceglie una azione mista σ^h tale che $\sigma^h(a)=\sigma_j(a)$, $a \epsilon A(h)$, dove σ_j è una strategia assegnata effettiva rispetto a y^o e a ς_j ($\sigma_j \epsilon \Sigma_j^* | y^o$). Ogni giocatore modifica la sua congettura durante il gioco coerentemente con un criterio di rifiuto decisionale e alla fine del gioco modifica la sua congettura coerentemente a un criterio di rifiuto strategico.

A questo punto è possibile cominciare a formalizzare le ipotesi secondo cui i giocatori sono dotati di certe informazioni a priori sulla razionalità altrui. Poichè le congetture altrui non sono osservabili, le informazioni sulla razionalità (che sono generali ed astratte) si limiteranno ad affermare che, se il vero gioco Γ e un giocatore i diverso da j fosse dotato dell'informazione a priori y_i, allora la sua congettura iniziale ς_i sarebbe compatibile con essa e la scelta delle azioni sarebbe prevedibile in base a una strategia effettiva rispetto a y_i. Usando la notazione del paragrafo 4.1 ciò si può rappresentare così:

θ_j: $B_j(\Gamma)$ incluso in $(x_{i\in I\setminus\{j\}} S_i^{*}|y_i)$ incluso in $S[j,\Gamma]$

Supponiamo ora che ogni giocatore sia dotato di completa informazione. In questo caso l'informazione a priori secondo cui ogni giocatore è razionale (nel senso specificato sopra) e conosce il vero gioco Γ^o è "oggettiva", cioè corrisponde alla realtà rappresentata dal modello. In base a questa ipotesi per ogni $j \in I$ θ_j è tale che j usa la distribuzione degenere $\mu_j|\Gamma^o$ e la corrispondenza $B_j(\Gamma)$ vista sopra. Le congetture del giocatore j sono perciò ricavate nel modo seguente: si considerano le strategie pure effettive dei giocatori diversi da j che j ritiene possibili, se ne ricava una combinazione di strategie miste in base alle distribuzioni $b_{jk}^{\Gamma^*}$ e da queste si ricava c_j nello stesso modo in cui si ricavano le strategie miste comportamentali da quelle in forma normale: posto $k:=i(x)$, $h:=H(x)$, $\alpha(t):=a$ e $t \in S(x)$, omettendo l'apice Γ^o e ponendo $b_{jk}(s_k):=0$ se s_k non appartiene a $B_{jk}(\Gamma^o)$ (cioè se j considera impossibile che k adotti la strategia pura s_k), si ottiene

$$c_j(t|x)=[\sum_{h\in Rel\ s,\ s(h)=a} \sigma(s)]/[\sum_{h\in Rel\ s} \sigma(s)],$$

con $\sigma:=\sum_{s\in Bk} b_{jk}(s)$, se $\sum_{h\in Rel\ s} \sigma(s)>0$, ovvero se $h\in Rel\ \sigma$

$$r_j(w)=r^o(w), \quad w\epsilon W$$

(sulle relazioni tra strategie miste in forma normale e strategie comportamentali si veda il paragrafo 3.3 e Kuhn [1953]).

L'informazione a priori di j secondo cui il vero gioco è Γ^o, ogni giocatore è razionale e ogni giocatore conosce Γ^o è indicata dal simbolo $(\Sigma^{j\bullet}|\Gamma^o)$. Si darà ora la definizione formale di compatibilità di una congettura con questa informazione che si etichetta con l'espressione "razionalità altrui e conoscenza condivisa del gioco"

Definizione 4.19. Una congettura ς_j è compatibile con la razionalità altrui e la conoscenza condivisa del gioco Γ^o se corrisponde a una combinazione di strategie miste comportamentali degli altri giocatori derivata da una combinazione lineare convessa di strategie pure effettive rispetto a Γ^o, cioè se, posto $k=i^o(x)$, $h=H^o(x)$, $a=\alpha^o(t)$ e $t\epsilon S(x)$, valgono le seguenti uguaglianze:

$$c_j(t|x)=[\sum_{s_k(h)=a,\, h\epsilon Rel\, s_k} p(s_k)]/[\sum_{h\epsilon Rel\, s_k} p(s_k)], \text{ se } \sum_{h\epsilon Rel\, s_k} p(s_k)>0$$

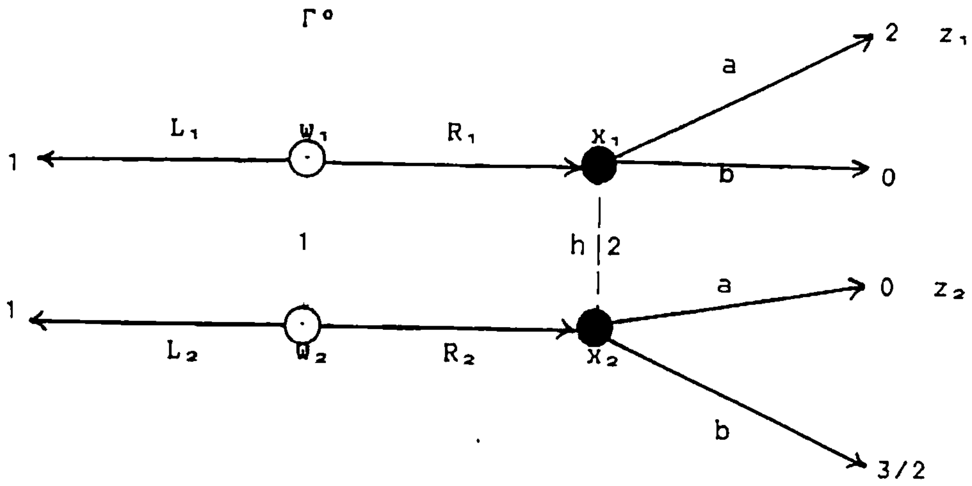
$$c_j(t|x)=\sum_{s_k(h)=a} p(s_k), \text{ se } \sum_{h\epsilon Rel\, s_k} p(s_k)=0,$$

$$\text{con } p(s_k)\geq 0 \text{ e } \sum_{s_k\epsilon S_k^\bullet|\Gamma^o} p(s_k)=1$$

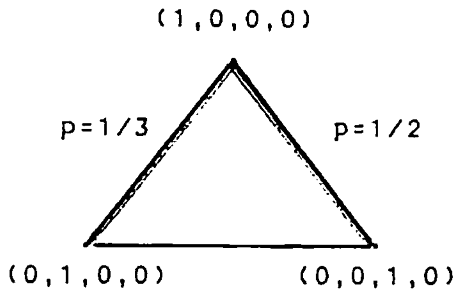
L'insieme delle congetture di j così definite si indica con $Ç_j|(\Sigma_j^\bullet|\Gamma^o)$. Una n-upla di congetture ς si dice compatibile con la razionalità altrui e la conoscenza condivisa del gioco se tali sono tutte le congetture componenti ς_j, $j\epsilon I$. L'insieme delle ς così definite si indica con $Ç|(\Sigma^\bullet|\Gamma^o)$.

Si osservi che la corrispondenza di ς_j con una combinazione di strategie miste effettive è una condizione sufficiente, ma non necessaria, affinchè $\varsigma\epsilon Ç_j|(\Sigma_j^\bullet|\Gamma^o)$. Il fatto

__L'insieme delle strategie effettive non necessariamente è convesso quando un giocatore dispone di più di un insieme d'informazione.__



	strategia w_1	w_2	effettiva rispetto a Γ^o e c_1 se
1	L_1	L_2	$1/3 \leq p \leq 1/2$
2	L_1	R_2	$p \leq 1/3$
3	R_1	L_2	$p \geq 1/2$
4	R_1	R_2	mai



p rappresenta la parte rilevante della congettura di 1, cioè la probablità che 1 (completamente informato) assegna all'azione a di 2:

$$p := c_1(z_1 | x_1) = c_1(z_2 | x_2)$$

Semplici calcoli mostrano che per 1 è razionale adottare le strategie pure indicate nella parte sinistra della tabella quando p soddisfa le disuguaglianze indicate nella parte destra. I valori limite sono quelli per i quali può scegliere una strategia mista. Sulla destra è indicato il simplesso unitario che rappresenta l'insieme delle strategie miste di 1. Esso è geometricamente rappresentato come un triangolo che ha per vertici le strategie pure effettive. Di tutto il triangolo (compresi i punti interni) solo i due lati superiori rappresentano degli insiemi di strategie effettive. Se 2 ritiene possibili entrambe le strategie pure di 1 (L_1, R_2) (R_1, L_2), la sua congettura sarà una mistura probabilistica corrispondete a una strategia mista non effettiva (un punto interno del triangolo).

figura 15 bis

che non sia una condizione necessaria dipende dalla possibile non convessità dell'insieme delle strategie effettive (come pure dell'insieme delle strategie miopicamente razionali in cui è incluso). Nella figura 15 bis è riportato un esempio in cui le congetture compatibili con la razionalità altrui e la conoscenza condivisa del gioco non corrispondono in generale ad alcuna strategia mista effettiva.

L'uso dell'espressione "conoscenza condivisa del gioco" è giustificato dal fatto che l'informazione a priori in questione è "oggettiva", quando si assume che ogni giocatore sia completamente informato sulle regole del gioco e sappia che anche gli altri lo sono. Ciò però non significa che un giocatore j sia informato sul fatto che un altro giocatore i lo ritiene completamente informato. La definizione 4.19 non riguarda le "aspettative di 2° grado". Un giocatore j può credere in una congettura $ç_j \in Ç_j | (\Sigma_j^{\bullet} | \Gamma^{\circ})$ e temere o sperare che un altro giocatore i lo ritenga uno stupido e/o un disinformato. Si vedrà in seguito che congetture di questo genere sostengono equilibri assai "implausibili", ma non eliminati da definizioni di equilibrio ben più restrittive di quella di Nash. In un certo senso si è data una forma all'espressione "io credea ch'ei credette"; è possibile dare una forma all'espressione "io credea ch'ei credette ch'io credessi" e agli stadi successivi? E' possibile dare una forma matematica all'ipotesi secondo cui una certa informazione è "common knowledge"? Le definizioni che seguono sono un tentativo in questa direzione. La prima definizione caratterizza in modo ricorsivo le congetture ragionevoli di grado k. Le congetture ragionevoli di grado 0 sono quelle compatibili con l'informazione completa, che non necessariamente tengono conto della razionalità e delle conoscenze altrui. Le congetture ragionevoli di 1° grado tengono conto della razionalità altrui e della altrui conoscenza del gioco, ma non del fatto che anche gli altri tengono conto di queste cose. A questa carenza si sopperisce con le congetture ragionevoli di secondo grado. Tuttavia, posto che il modello contiene l'ipotesi di razionalità, nel momento in cui si assume che tutti i giocatori siano dotati di certe informazioni a priori, risultano vere (nell'ambito del modello) informazioni ancora più "avanzate" in questo processo di congetture reciproche. Si pone allora il seguente problema: come varia l'insieme delle congetture compatibili con le informazioni a priori, quando queste informazioni "aumentano di grado"? L'analisi del gioco rappresentato nella figura 15 (esempio 4.4) ha mostrato che all'aumentare del grado dell'informazione il suo contenuto empirico (cioè gli eventi del gioco ritenuti impossibili in base ad essa) può diminuire. Si è visto infatti che l'insieme delle congetture del giocatore 2 ragionevoli di 1° grado include strettamente l'insieme delle congetture ragionevoli di grado 0. Una condizione necessaria affinchè si possa parlare di conoscenza condivisa sembra essere quella per cui a un certo punto questo processo di congetture reciproche produca un insieme di congetture ammissibili stabile per ogni giocatore.

Definizione 4.20. (Congetture ragionevoli di grado k). Una congettura $ç_j$ si dice ragionevole di grado 0 se è compatibile con Γ^o ($ç_j \in Ç_j|\Gamma^o$), si dice ragionevole di 1° grado se è compatibile con ($\Sigma^{j\bullet}|\Gamma^o$), cioè con la razionalità altrui e la conoscenza condivisa del gioco ($ç_j \in Ç_j|(\Sigma^{j\bullet}|\Gamma^o)$). Posto $y_j^o := \Gamma^o$ e $y_j^1 := (\Sigma^{j\bullet}|\Gamma^o)$, si dice che $ç_j$ è ragionevole di grado $k>1$ se $ç_j \in Ç_j|y_j^k$, dove $Ç_j|y_j^k$ è l'insieme delle congetture corrispondenti a qualche combinazione di strategie altrui σ^j, derivabile da una combi$_n$azione lineare convessa di strategie pure effettive rispetto all'informazione y_i^{k-1} ($s_i \in S_i^\bullet|y_i^{k-1}$, $i \in I\setminus\{j\}$). Ad esempio $ç_j \in Ç_j|y_j^2$, se $ç_j$ corrisponde a una σ^j tale che σ_i è la strategia comportamentale equivalente a una mistura di strategie pure $s_i \in S_i^\bullet|\Gamma^o :=$ $:= S_i^\bullet|y_i 1$ per ogni $i \in I\setminus\{j\}$.

La 4.20 è una definizione ricorsiva, $Ç_j|y_j^k$ può essere definito solo se è già stato definito $Ç|y_j^{k-1}$ e quindi si può risalire a y_j^k dalla definizione (indipendente) di y_j^1. In questo modo si definisce ricorsivamente una successione di sottoinsiemi di $Ç_j$: $(Ç_j|y_j^k)_o^\infty$

Definizione 4.20 bis.(Conoscenza condivisa). Se le successioni $(Ç_j|y_j^k)_o^\infty$, $j \in I$, definite dalla 4.20 sono tali che esiste un K, per il quale $k \geq K$ implica $Ç_j|y_j^k = Ç_j|y_j^{k-1}$, allora si dice che la conoscenza dei giocatori è condivisibile. Si dice che la conoscenza è condivisa se si assume che $ç \in Ç|y^k :=$ $:= Ç_1|y_1^k \times Ç_2|y_2^k \times \ldots \times Ç_n|y_n^k$; inoltre se ç è l'unico elemento di Ç$|y^K$ si dice che la conoscenza è completamente condivisa.

Ad avviso dello scrivente, il caso della conoscenza completamente condivisa è l'unico in cui si possa veramente parlare di una "soluzione oggettiva" del gioco, con la possibile eccezione in cui Ç$|y^k$ ha più di un elemento, ma le strategie cui corrispondo le diverse ç godono di una proprietà di scambiabilità (eccezione che potrebbe essere eliminata con una opportuna ridefinizione del gioco).

E' ben noto che nei giochi a informazione perfetta è possibile selezionare delle strategie di equilibrio con un procedimento di "backword induction": partendo dai nodi finali del gioco si selezionano quegli archi che corrispondono a una azione ottima del giocare che muove in quel momento; si ottiene così un gioco in cui ogni percorso ha un numero di archi diminuito di uno rispetto al gioco di partenza e si ripete l'operazione. Procedendo in questo modo si determinano delle strategie di equilibrio (nel senso di Nash e anche secondo tutte le definizioni più restrittive) e uno o più percorsi di equilibrio (si ottiene più di un percorso se si selezionano delle strategie miste). Si può facilmente intuire che se ogni funzione di utilità u_j è biunivoca, si ottiene una unica combinazione di strategie pure e un unico percorso di equilibrio. Sembrerebbe che queste strategie e questo percorso rappresentino *la* soluzione del gioco, ma si può mostrare che, se il gioco contiene percorsi con più di due archi, non necessariamente è così.

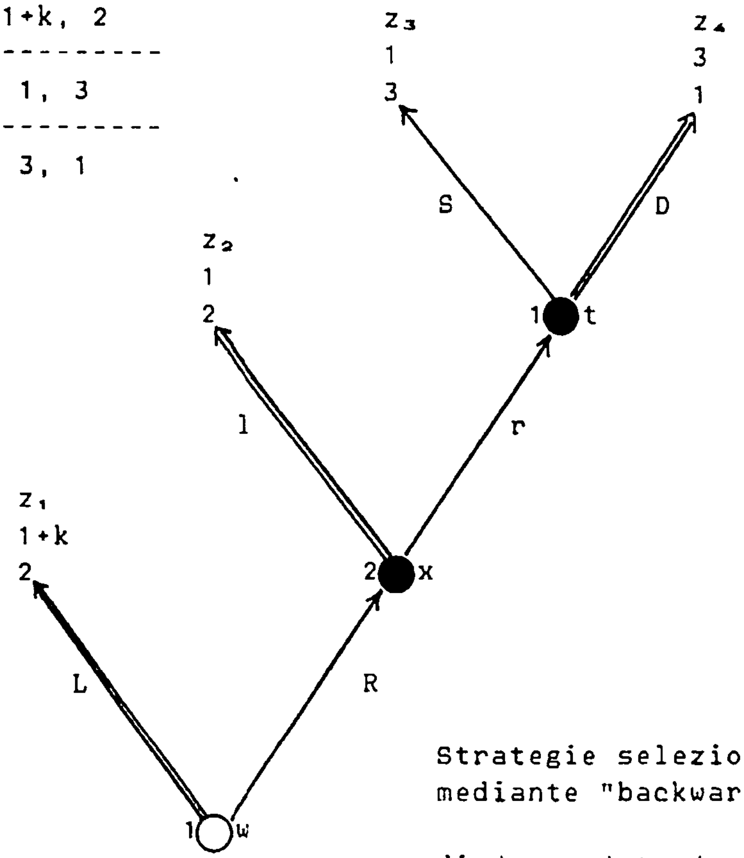
Esempio 4.5. Si consideri il gioco a rami morti rappresentato nella figura 16. Gli archi evidenziati rappresentano le strategie e il percorso selezionati con il procedimento di "backword induction". Si può facilmente verificare che z_1 è l'unico esito sostenibile da un equilibrio Nash o addirittura da un qualunque equilibrio congetturale. Tuttavia i giocatori hanno interesse a massimizzare l'utilità attesa nella partita che sta per cominciare sono quindi disinteressati all'equilibrio in quanto tale. Ma supponiamo che essi partano dalla "ipotesi provvisoria" che questo equilibrio rappresenti *la* soluzione del gioco. In questo caso il giocatore 1 potrebbe pensare di "disorientare"

"Backward induction" e soluzione di un gioco.

Forma normale

2 / 1	l	r
L, S	1+k, 2	1+k, 2
L, D	1+k, 2	1+k, 2
R, S	1, 2	1, 3
R, D	1, 2	3, 1

$\Gamma^{\circ}(k)$
$0<k<1$



Strategie selezionate
mediante "backward ind."

nodi / gioc.	w	t	x
1	L	D	/////
2	/////	////	l

Si supponga che i giocatori adottino la soluzione qui rappresentata come ipotesi provvisoria. Il gioc. 1 può allora sperare di "disorientare" 2 scegliendo R. Infatti trovandosi in x 2 può pensare che 1 commetta altri "errori" e scegliere r. 1, contando su ciò, potrebbe pensare di raggiungere t e scegliere D, ottenendo un guadagno di 3.

figura 16

2 comportandosi in modo difforme rispetto alla soluzione, cioè scegliendo R. Il giocatore 2 vedrebbe falsificata la sua congettura e potrebbe concluderne che forse 1 è irrazionale e/o la sua funzione di utilità, u_1, non è quella rappresentata in figura. 2 potrebbe allora scegliere r sperando in un altro errore di 1. Ma è proprio questo lo scopo che 1 cerca di ottenere: se 2 sceglie r con una probabilità almeno del 50% egli può ottenere con la strategia (R,D) una utilità attesa più alta che scegliendo L. Naturalmente ognuno dei due giocatori può spingersi più avanti nel ragionamento: 2 potrebbe pensare che se 1 sceglie R è solo perchè sta cercando di disorientarlo. Ma con questi ulteriori passi non si è in grado di stabilire in modo definitivo la validità della soluzione (cfr. Luce, Raiffa [1957], pp 80-81).

La precedente esposizione ha un riscontro matematico: si può facilmente verificare che $Ç|y^{K}=Ç$ e quindi contiene infiniti elementi. I giocatori possono avere una conoscenza condivisa, nel senso che spingendosi in avanti nel processo delle congetture reciproche arrivano in un numero finito di passi a un insieme stabile di possibilità. Ma questa conoscenza condivisa è astratta e non è in grado di produrre previsioni condizionate precise.

Con la definizione 4.20 si può definire una infinità numerabile di equilibri: gli equilibri congetturali sostenuti da congetture ragionevoli di grado k. E' interessante studiare le proprietà di questi equilibri almeno per qualche valore di k "abbastanza piccolo". Per k=0 si hanno gli equilibri sostenuti da informazioni compatibili con l'informazione completa. Nei paragrafi 4.3 e 4.4 si è visto in quali condizioni questi equilibri sono equivalenti (strategicamente e/o empiricamente) ad equilibri Nash. Per $k \geq 1$ si userà l'espressione "equilibrio semisequenziale di grado k". L'aggettivo "semisequenziale" è usato per i seguenti motivi: in questi equilibri ogni giocatore immagina che gli altri, se vengono messi nelle condizioni per farlo, operino una sequenza di massimizzazioni dell'utilità attesa, basandosi su distribuzioni di probabilità ricavate con la regola di Bayes, quando questa è applicabile. Basandosi su un approccio che, almeno per certi aspetti, è simile a quello qui adottato Kreps e Wilson hanno definito un concetto di equilibrio che pone alcune condizioni più restrittive rispetto agli equilibri semisequenziali di grado k (Kreps, Wilson [1982]); in particolare fa riferimento a strategie supereffettive ed è un rafforzamento della condizione di Nash. Tale equilibrio viene definito dagli autori "equilibrio sequenziale". Nel prossimo paragrafo si mostrerà che, con la possibile eccezione per un insieme trascurabile di giochi, gli equlibri sequenziali sono un sottoinsieme di quelli semisequenziali di grado 1.

Definizione 4.21. Un equilibrio congetturale $(ç,\sigma)$ sostenuto da una n-upla di congetture ragionevoli di grado $k \geq 1$ $(ç \in Ç|y^k)$ è detto equilibrio semisequenziale di grado k. Se k=1, cioè se $ç \in Ç|(\Sigma|\Gamma^o)$, allora l'equilibrio congetturale $(ç,\sigma)$ è semplicemente detto "semisequenziale".

Si devono tenere ben presenti due cose a proposito degli equilibri semisequenziali:

1) non necessariamente ç corrisponde a σ, cioè non necessariamente le congetture sono corrette; quindi $(ç,\sigma)$ può essere un equilibrio semisequenziale di grado k e non essere un equilibrio di Nash;

2) non necessariamente le strategie in σ sono effettive.

Lo studio del gioco della minaccia (figura 4) mostra che la semisequenzialità è una proprietà interessante. E' infatti immediato verificare che l'unico equilibrio semisequenziale di quel gioco è quello "plausibile" in cui il giocatore 1 resiste alla minaccia non credibile. Ma ciò mostra anche, come era da prevedersi, che non tutti gli equilibri di Nash sono semisequenziali. Poichè si è dimostrata l'esistenza per ogni gioco finito di un equilibrio congetturale in virtù dell'esistenza di un equilibrio Nash, è possibile che almeno per qualche gioco non esistano equilibri semisequenziali. Nel prossimo paragrafo si mostrerà che non è questo il caso, perchè per ogni gioco finito l'insieme degli equilibri semisequenziali include l'insieme degli equilibri perfetti e quest'ultimo non è vuoto (Selten [1975]).

4.6. Equilibri sequenziali, perfetti e semisequenziali.

David Kreps e Robert Wilson hanno elaborato una nozione di equilibrio che per certi versi si avvicina a quella qui presentata. Essi osservano che:

> "Every decision must be part of an optimal strategy for the remainder of the game. In game with imperfect or incomplete information, this requirement entails conformity with Savage's axiom of choice under uncertainty (...) An equilibrium is not simply a strategy, but consists instead of two types of probability assessments by the players: the beliefs of a player concerning where in the game tree he is whenever it is his turn to choose an action, and his conjecture concernig what will happen in the future as given by the strategy" (Kreps, Wilson [1982], p 863).

Kreps e Wilson sostengono che quando si prende in esame un presunto equilibrio σ (tipicamente un equilibrio di Nash che può essere implausibile), bisogna costruire un sistema di credenze μ (si veda la def.4.12) che specifica per ogni nodo h la probabilità che il giocatore i(h) assegna ai vari nodi $x \in h$, subordinatamente all'ipotesi che egli si trovi in h. I due autori richiedono che il sistema di credenze μ associato a σ soddisfi diversi requisiti di consistenza, tutti implicati da un unico criterio che si esaminerà in seguito.

Coerenza con σ tramite la regola di Bayes. Ove possibile $\mu(x)$ deve essere derivato da σ con la regola di Bayes, cioè se $\Pr[Z(H(x))|\sigma]>0$, allora

$$\mu(x) = \frac{\Pr[Z(x)|\sigma]}{\Pr[Z(H(x))|\sigma]} .$$

Tenendo conto del fatto che la combinazione di strategie σ è un equilibrio di Nash, di cui viene testata la plausibilità, se ς è la n-upla di congetture corrispondente a σ, questa proprietà equivale ad affermare che $\mu=\mu^{\varsigma,L}$, dove L è una qualsiasi n-upla di regole d'apprendimento che soddisfano il requisito (4.15) della definizione 4.11: gli agenti non cambiano le loro congetture se queste non vengono falsificate e le distribuzioni di probabilità subordinate che essi usano soddisfano gli usuali assiomi del calcolo delle probabilità.

Consistenza strutturale. Se $\Pr[Z(H(x))|\sigma]=0$, $\mu(x)$ non deve essere completamente arbitrario. Deve sempre essere possibile derivare μ da una combinazione di strategie σ', che assegna a $H(x)$ una probabilità positiva. Formalmente: per ogni $h \in H(X)$ esiste una $\sigma' \in \Sigma$ tale che

$$\Pr[Z(h)|\sigma']>0 \text{ e } \mu(x)=\frac{\Pr[Z(x)|\sigma']}{\Pr[Z(h)|\sigma']}, \quad x \in h$$

Posto $\mu=\mu^{c \cdot L}$ ciò equivale ad affermare che che le regole d'apprendimento L_j sono coerenti rispetto a Γ^o, cioè $L \in L[\Gamma^o]$. Infatti L'informazione a priori Γ^o non può essere virtualmente falsificata da alcun insieme d'informazione h e quindi il requisito (4.17) impone di adottare sempre congetture compatibili con Γ^o, cioè corrispondenti a qualche n-upla di strategie.

Consistenza lessicografica. μ deve essere calcolata a partire da una successione di congetture corrispondenti a una successione di strategie $\sigma=\sigma(1),\sigma(2),\ldots\sigma(K)$ (che rappresentano l'ipotesi iniziale e le ipotesi secondarie) in modo tale che $\mu(x)$ sia derivata, tramite la regola di Bayes, dalla $\sigma(k)$ con l'indice k più piccolo tra tutte quelle che assegnano ad $H(x)$ una probabilità positiva. Questa proprietà implica le due precedenti ed è molto forte. Si afferma in sostanza che tutti i giocatori usano la stessa regola d'apprendimento. Dal punto di vista qui adottato questo requisito è chiaramente arbitrario. I due autori impongono ulteriori requisiti che qui non sono esposti. L'interpretazione di questi requisiti è che dopo una "defezione" da σ il giocatore che la ha constatata in h continua a credere in σ, per quanto possibile; cioè usa nel calcolo di μ una ipotesi secondaria $\sigma(2)$ che rappresenta la minima modificazione compatibile con l'informazione h, analogamente dopo una defezione da $\sigma(2)$ si adotta una $\sigma(3)$ che rappresenta la minima modificazione possibile di $\sigma(2)$ e così via. I giocatori raffigurati da Kreps e Wilson sono il più possibile conservatori:

> "The Key here is the continued use of π [cioè σ] after an initial defection. The philosophy behind this is that the strategy π at an information set h should encode the player conjectures concerning what will happen if h is reached. If h is reached only by a defection, then π should encode what will subsequently happen, conditional on that

initial defection. A first defection does not make a second more likely; correlation in defection are partially ruled out."(Kreps, Wilson [1982], p 875).

Ci siamo già dilungati sul fatto non necessariamente i giocatori devono conoscere le loro regole d'apprendimento. La specificazione delle azioni scelte in seguito ad eventi che si ritengono impossibili è un artificio matematico: un agente ha bisogno di specificare le azioni future solo se ciò è utile per le scelte presenti, ma le azioni dipendenti da eventi che l'agente ritiene impossibili sono irrilevanti ai fini delle scelte presenti (si veda la discussione sulla nozione di teoria nel paragrafo 1.2). Va inoltre aggiunto che non è possibile prevedere in modo scientifico la crescita della conoscenza scientifica (Popper [1984], p 74) e quindi nella magior parte dei casi le regole di apprendimento sono arbitrarie, non derivabili con un algoritmo oggettivo. Su quali basi è possibile che un agente formuli le proprie previsioni su ciò in cui crederà, quando la sua congettura attuale sarà falsificata? E soprattutto, cosa può rendere le "congetture sulle future congetture" tanto intersoggettive da poter essere condivise da tutti i giocatori?

Si passa ora alla definizione dell'equilibrio sequenziale.

Si userà la seguente notazione: dati $z \in Z$ e $h \in H(X)$

$Pr(z|h,\mu,\sigma):=0$, se $z \in Z \setminus Z(h)$ (z non è un successore di h)

(4.23)

$Pr(z|h,\mu,\sigma):= \mu(p_n(z)))\Pi_{m=1}{}^{n}\sigma_{\iota(pm(z))}(\alpha(p_{m-1}(z))$ se $z \in Z(h)$ e $p_n(z) \in h$ (h contiene il predecessore ennesimo di z).

La (4.23) indica semplicemente come si calcola in base a σ e μ la probabilità di un nodo finale subordinatamente all'informazione h. Ma la apparente banalità della (4.23) è sviante. Ciò può essere compreso se si pensa a come vengono calcolate le probabilità soggettive subordinate all'informazione h (formula 4.20). In tale calcolo le probabilità degli archi successori di h corrispondenti ad azioni altrui sono ricavate dalla nuova congettura adottata in base all'informazione h. La (4.23) afferma che queste probabilità restano uguali a quelle date dalla congettura precedente (che corrisponde a $\sigma^{i(h)}$). Ma è possibile che l'uso in chiave futura della vecchia congettura sia incompatibile con il calcolo di μ mediante la nuova congettura . In particolare ciò può verificarsi se esistono archi che precedono h e archi che seguono h, corrispondenti alla stessa azione. Questa situazione non è esclusa dalle ipotesi che definiscono i giochi in forma estesa con memoria perfetta. Per verificarlo basta dare un'occhiata al gioco rappresentato nella figura 17. Si ritornerà in seguito a considerare questo gioco per mostrare che l'uso della formula (4.23) può produrre equilibri sequenziali in cui la scelta delle azioni è incoerente rispetto a tutte le ipotesi secondarie, da cui può essere derivato il sistema di credenze di equilibrio.

Nel paragrafo 4.2 si è messo in evidenza che per definire correttamente un equilibrio è opportuno considerare un oggetto matematico più complesso di una combinazione di strategie. Le strategie degli agenti devono essere esaminate congiuntamente con le loro congetture, questo tra l'altro permette di vagliare le proprietà degli equilibri in base alle proprietà delle congetture che li sostengono. Dunque l'oggetto matematico più opportuno per definire un equilibrio è la coppia $(\c{c},\sigma)$. Da questo punto di vista la posizione di Kreps e Wilson è analoga. Essi affermano che l'oggetto matematico più opportuno per definire un equilibrio è una coppia (μ,σ) formata da un sistema di credenze e da una combinazione di strategie. Nelle pagine precedenti si è mostrato che che esiste una stretta connessione tra le nozioni di "congettura" e "sistema di credenze". Non ci si deve però far ingannare dal significato comune dei termini: le credenze e le congetture, così come sono state definite in questa sede, non sono la stessa cosa, neanche approssimativamente. La congettura di un agente è uno strumento previsivo (fallibile), che gli permette di associare a ogni sua strategia una distribuzione di probabilità sullo spazio dei risultati Z. Un sistema di credenze indica come ogni agente j valuta la probabilità di trovarsi in un certo nodo x ($x \in X_j$), subordinatamente all'informazione h ($x \in h$). Per calcolare questa probabilità l'agente usa una congettura, ma non necessariamente quella in cui credeva all'inizio del gioco, perchè durante il gioco l'agente potrebbe aver appreso. Quindi in un sistema di credenze sono presenti le congetture e le regole d'apprendimento degli agenti (si vedano la formula 4.18 e le definizioni 4.12 e 4.13). Quando si vuole evidenziare ciò si usa la notazione $\mu^{c.L}$, per indicare che il sistema di credenze è stato derivato da una n-upla di congetture iniziali ç e da una una n-upla di regole d'apprendimento L.

Alla coppia (μ,σ) si dà il nome di valutazione ("assessment"). Dalle proprietà che sono imposte a (μ,σ), in particolare dalla coerenza lessicografica, di può dedurre che (μ,σ) è inerpretabile come una valutazione probabilistica collettiva da parte degli agenti. I requisiti di razionalità sono perciò imposti da Kreps e Wilson sulla valutazione nel suo complesso, piuttosto che sulle singole strategie.

Le formule 4.23 mostrano le probabilità subordinate, calcolate in base a una valutazione (μ,σ). Si indichi con $E(u_{i(h)}|h,\mu,\sigma)$ il valore atteso della utilità del giocatore i(h) subordinato all'informazione h, che tale giocatore può ricevere, e calcolato con le probabilità di cui sopra. Allora il requisito di razionalità imposto a (μ,σ) è che per ogni h tale valore atteso sia maggiore o almeno uguale a quelli ottenibili con un cambiamento di strategia da parte di i(h).

Definizione 4.22. Una valutazione (μ,σ) è detta sequenzialmente razionale se per ogni $h \in H(X)$

$$E(u_{i(h)}|h,\mu,\sigma) \geq E(ui(h)|h,\mu,\sigma_{i(h)}',\sigma^{i(h)}),\ \sigma_{i(h)}' \in \Sigma_{i(h)}.$$

La definizione dell'equilibrio sequenziale si ottiene combinando il requisito della razionalità sequenziale con un requisito di consistenza che implica tutti quelli esposti o accennati in precedenza.

Si indichi con $\Sigma_j{}^\circ$ l'insieme delle strategie completamente miste di j, cioè delle strategie che assegnano una probabilità positiva a ogni azione ($\sigma_j \in \Sigma_j{}^\circ$ se e solo se $\sigma_j(a)>0$ per ogni azione a di j). Σ° è il prodotto cartesiano dei $\Sigma_j{}^\circ$: $\Sigma^\circ := \times_{j \in I}\Sigma_j{}^\circ$. Si indichi ora con Ω° l'insieme delle valutazioni (μ,σ) tali che $\sigma \in \Sigma^\circ$ e μ è derivata da σ con la regola di Bayes:

$$\mu(x)=Pr\{Z(x)|\sigma\}/Pr\{Z(H(x))|\sigma\}$$

Definizione 4.23. Una valutazione (μ,σ) è detta consistente se esiste una successione $((\mu_m, \sigma_m)_{m=1}^{\infty})$ inclusa in Ω^o tale che $(\mu, \sigma) = \lim_{m \to \infty} (\mu_m, \sigma_m)$. L'insieme delle valutazioni consistenti si indica con Ω (perciò Ω è la chiusura di Ω^o). Un equilibrio sequenziale è una valutazione (μ, σ) consistente e sequenzialmente razionale.

E' evidente che la razionalità sequenziale di (μ, σ) implica che σ soddisfi la condizione di Nash. Quindi ogni equilibrio sequenziale è anche un equilibrio Nash. Il gioco della minaccia è sufficiente a dimostrare che esistono equilibri Nash non sequenziali: si tratta di equilibri basati su minaccie non credibili.

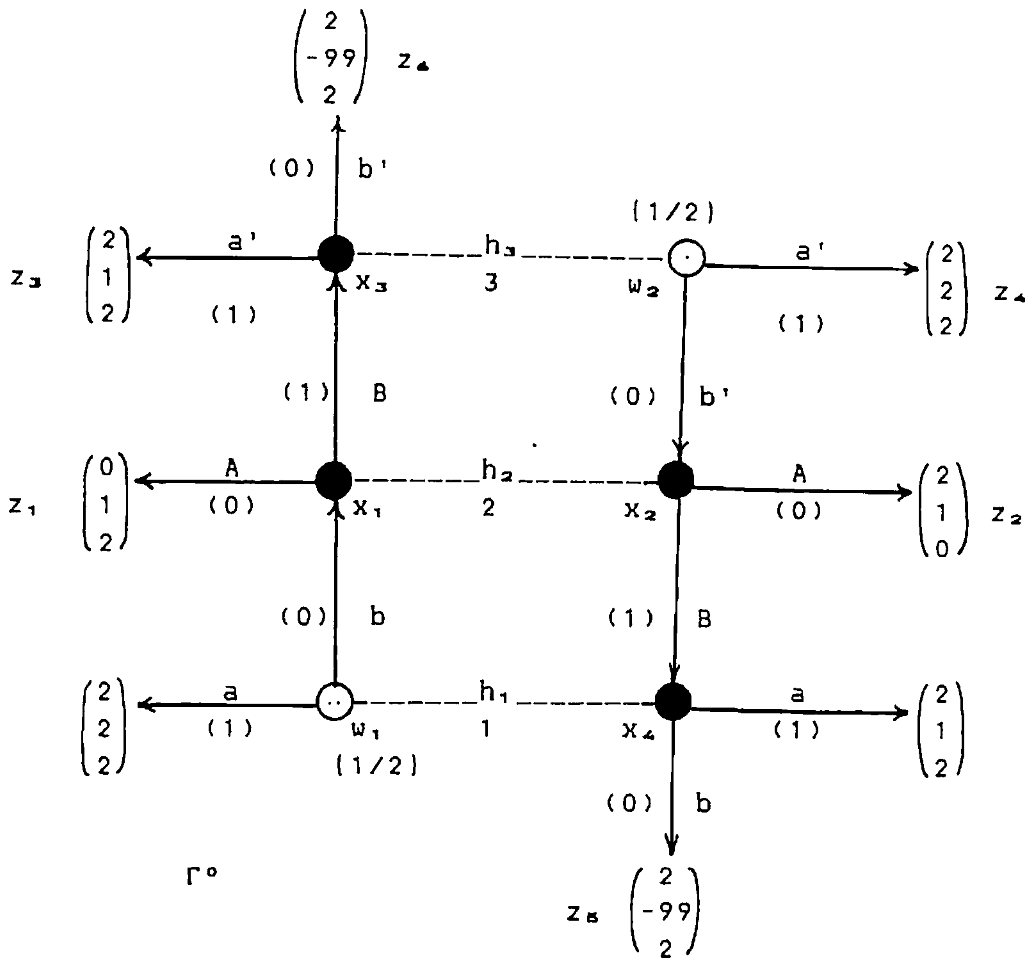
Il criterio di consistenza specificato dalla definizione 4.23 implica la consistenza lessicografica e gli altri criteri di consistenza esposti in precedenza. La discussione fatta a proposito di quei criteri è già sufficiente a dimostrare che, se esiste una relazione di implicazione tra la sequenzialità e la semisequenzialità di un equilibrio, questa deve essere del tipo: "ogni equilibrio sequenziale è anche semisequenziale, ma non necessariamente vale la proposizione inversa". Ciò è vero a maggior ragione se si pensa che la razionalità sequenziale, ammesso che abbia senso come condizione di razionalità, impone che le strategie (cui corrispondono le congetture quando si ha un equilibrio Nash) siano supereffettive, mentre in un equilibrio Nash semisequenziale le strategie sono solo effettive, non necessariamente supereffettive. Ciò significa che la sequenzialità impone la massimizzazione dell'utilità anche su forme decisionali (cfr. def. 4.14) che un agente ha deciso di non raggiungere, escludendole con le sue azioni iniziali. Questo dà rilevanza a un aspetto della definizione di strategia che dovrebbe essere un puro artificio matematico. Gli agenti sono completamente disinteressati rispetto a quelle scelte future che sono escluse da scelte già effettuate. Un piano d'azione non ha bisogno di prescrivere le azioni da scegliere in situazioni che non si verificheranno mai a causa di azioni precedenti dell'agente stesso. In termini formali ciò si esprime dicendo che le azioni prescritte dalla strategia per insiemi di informazione irrilevanti non contano nulla e infatti due strategie risultano equivalenti quando definiscono la stessa classe di insiemi d'informazione rilevanti e coincidono su tali insiemi (se Rel

σ_j = Rel σ_j' e per ogni $h \in$ Rel σ_j $\sigma_j(a)=\sigma_j'(a)$, $a \in A(h)$, allora σ_j e σ_j procurano la stessa utilità attesa, indipendentemente dalla congettura di j; si veda la definizione di equivalenza in Kuhn [1953]). L'artificio matematico per cui una strategia prescrive delle scelte anche per insiemi d'informazione irrilevanti è innoquo solo se non si impone che tale strategia rispetti delle condizioni relativamente a quegli insiemi. Invece la razionalità sequenziale fa diventare rilevanti gli insiemi d'informazione irrilevanti. In seguito si mostrerà con degli esempi che ciò porta a delle conseguenze spiacevoli: giochi che sembrano essere completamente equivalenti e che definiscono lo stesso insieme di risultati possiedono insiemi diversi di esiti sostenibili con un equlibrio sequenziale.

Tutto lascia pensare che, se la definizione della razionalità sequenziale ha senso, cioè se non è basata su presupposti contraddittori, allora ogni equilibrio sequenziale è anche semisequenziale. Ma esistono giochi in cui questa condizione non si verifica e ciò lascia spazio al dubbio che esistano equilibri sequenziali che non sono semisequenziali.

Esempio 4.6. Nella figura 17 è rappresentato un gioco Γ^o con tre giocatori. La peculiarità di questo gioco è che per ogni insieme d'informazione h_j esiste almeno una coppia di archi corrispondenti alla stessa azione (di un giocatore diverso da j), di cui uno porta in h_j mentre l'altro segue un terzo arco uscente da h_j. Per esempio sull'arco $w_1 \rightarrow x_1$ è definita l'azione b e $x_1 \in h_2$; sull'arco $x_4 \rightarrow z_8$ è definita la stessa azione, b, ed esiste un sottopercorso che porta da h_2 in z_8, si tratta di $x_2 \rightarrow x_4 \rightarrow z_8$. Questa è esattamente la situazione in cui le probabilità subordinate definite dalla formula (4.23) possono essere prive di senso e stranamente Kreps e Wilson, pur avendo costruito un gioco che ha esattamente la stessa struttura (Kreps, Wilson [1982], p 878, fig. 8), non lo hanno notato. Se viene raggiunto un h_j, che aveva una probabilità a priori nulla, il giocatore j è costretto ad assegnare una probabilità positiva ad almeno uno degli archi e/o nodi iniziali che portano in h; se uno di questi archi ha un "gemello" tra i successori di h, allora j è costretto a modificare anche le probabilità di eventi che, per quel che ne sa potrebbero ancora accadere. Se non lo facesse sarebbe

Un caso in cui delle valutazioni di equilibrio sequenziale prevedono un comportamento irrazionale rispetto a ogni ipotesi secondaria da cui è derivabile la credenza μ di equilibrio.



Questo gioco ha più di un equilibrio sequenziale in strategie pure. Uno è dato da (a,A,a') ed è un equilibrio in strategie dominanti. Ma nella figura è rappresentato un equilibrio in strategie pure, di cui una è dominata, che è anch'esso sequenziale: (a,B,a'). Si ha infatti

$E(u_2|\mu,a,B,a')=\mu(x_1)+\mu(x_2)=1 \geq 1=\mu(x_1)+\mu(x_2)=E(u_2|\mu,a,A,a')$.

Ma è chiaro che l'uso delle probabilità per calcolare il primo valore atteso è contraddittorio con qualsiasi credenza μ. Se 2 si trova in h_2 è costretto a supporre che $\sigma_1(a)+\sigma_2(a')>0$ e invece nel calcolo del primo valore atteso in base alla formula 4.23 tale somma è considerata nulla. La consistenza non pone nessun vincolo su $\mu(x_1)$ e $\mu(x_2)$, quindi ogni valutazione consistente (μ,a,B,a'), in cui $\mu(x_1)\epsilon(0,1)$, è un equilibrio sequenziale. Ogni valutazione di questo tipo prevede un comportamento (virtuale) di 2 irrazionale rispetto a qualsiasi ipotesi secondaria da cui sia derivabile μ. Soltanto ponendo $\mu(x_1)=0$ oppure $\mu(x_1)=1$, la scorretta specificazione della formula 4.23 risulta innocua e B risulta essere una azione razionale rispetto a ogni ipotesi secondaria che genera μ.

figura 17

completamente incoerente. I giocatori 1 e 3 non possono trovarsi in questa situazione, perchè la distribuzione degli stati di natura implica che i loro insiemi d'informazione h_1 e h_3 siano raggiunti con una probabilità maggiore o uguale al 50%. Il giocatore 2 invece ha un insieme d'informazione che non può essere raggiunto se 1 e 3 adottano rispettivamente le strategie pure a e a'. Se h_2 venisse raggiunto, 2 dovrebbe pensare che 1 e 3 hanno adottato delle strategie tali che $\sigma_1(b)+\sigma_3(b')>0$.

Si osservi che le strategie pure a e a' sono dominanti ($a \succeq b$, $a' \succeq b'$) e quindi fanno certamente parte di un equilibrio sequenziale. Infatti per 1 e 3 la condizione imposta dalla razionalità sequenziale e quella di Nash si equivalgono. Anche 2 dispone di una strategia dominante: la strategia pura A gli garantisce un guadagno maggiore o uguale a 1, mentre con B può guadagnare al massimo 1 e può addirittura perdere 99. Se 1 e 3 scelgono a e a', le credenze di 2 su h_2 sono completamente libere, il requisito di consistenza non pone alcun vincolo: qualsiasi $\mu \geq 0$ tale che $\mu(w_1)=\mu(w_2)=1$ e $\mu(x_1)+\mu(x_2)=1$ fa parte, con a e a', di una valutazione consistente. Per dimostralo basta considerare una qualsiasi successione convergente di valutazioni positive $(\mu_m,\sigma_m)\in\Omega^o$, m=1,2,3..., tale che $\sigma_m(b')=k\sigma_m(b)$ con $0<k<\min_{m\in N}\{1/\sigma_m(b)\}$ (l'indice relativo agli agenti è omesso per semplificare la notazione); er queste successioni $\mu_m(x_1)$ e $\mu_m(x_2)$ sono indipendenti da m e quindi il calcolo del limite è immediato:

$$\mu_m(x_1)=\frac{1/2\ \sigma_m(b)}{1/2\ k\sigma_m(b)+1/2\ \sigma_m(b)}=1/(1+k)=\mu(x_1)\in(0,1)$$

Per ottenere i valori estremi 0 e 1 basta usare successioni convergenti per le quali $\sigma_m(b')=(\sigma_m(b))^{1-\alpha}$ con α diverso da zero. Per ottenere una valutazione contenente le strategie pure a e a' bisogna $\sigma_m(b)$ converga a zero per $m\to\infty$, quindi si ottiene $\mu(x_1)=\lim_{\sigma\to 0}1/(1+\sigma^\alpha)$. Il limite è 0 se $\alpha<0$ ed è 1 se $\alpha>0$.

E' evidente che (μ,a,A,a') è un equilibrio sequenziale per ogni μ consistente. Meno evidente è che sia sequenziale lo "strano" equilibrio Nash (μ,a,B,a'), in cui 2 adotta una strategia dominata solo perchè è certo di non doverla mettere in atto. Ma ora si mostrerà che, paradossalmente, è così. A questo scopo basta mostrare che B è sequenzialmente razionale contro (a,a') per qualunque μ consistente. L'unica condizione da rispettare è che B massimizzi l'utilità attesa calcolata con la formula 4.23 e tale condizione è verificata:

$$E(u_2|\mu,a,B,a')=\mu(x_1)\sigma_1(a)+\mu(x_2)\sigma_3(a')=1=E(u_2|\mu,a,A,a').$$

Questo risultato dipende dal fatto che 2, in base alla 4.23, usa una distribuzione di probabilità basata su presupposti contraddittori: μ, qualsiasi esso sia, è derivato supponendo $\sigma_1(b)+\sigma_1(b')>0$, ma poi si pone $\sigma_1(a)=\sigma_3(a')=1$, che implica $\sigma_1(b)+\sigma_3(b')=0$. Si mostrerà ora che B, nonostante tutto, è una strategia effettiva, ma le uniche regole d'apprendimento coerenti che la sostengono sono tali che $\mu^{c.L}(x_1)$ o è 1 o è 0. Quindi per tutte le μ consistenti tali che $0<\mu(x_1)<1$ l'equilibrio sequenziale (μ,a,B,a') prevede un comportamento virtualmente irrazionale da parte di 2.

Sia L_2 una qualsiasi regola d'apprendimento coerente rispetto a Γ^o e si ponga $\varsigma_2'=L_2(\varsigma_2,h_2)$, $\varsigma_2\in\Varsigma_2|\Gamma^o$; la coerenza impone che 2 continui ad attribuire la stessa probabilità agli archi che corrispondono alla stessa azione di 1 o 3:

$p:=c_2'(x_1|w_1)=c_2'(z_8|x_4)$ e $q:=c_2'(x_2|w_2)=c_2'(z_4|x_3)$.

Da ciò di deduce che

$$E(u_2|h_2,\varsigma_{h2}^L,B)=[p/(p+q)](1-q)+[p/(p+q)]q(-99)+$$
$$+[q/(p+q)](1-p)+[q/(p+q)]p(-99)=$$

$$=(-100)[2pq/(p+q)]+1 \leq 1 = E(u_2|h_2,\varsigma_{h2}^L,A).$$

Esistono solo due casi in cui l'azione B può essere razionale dopo aver raggiunto h_2: il caso in cui p=0 e quello in cui q=0. Se L_2 è tale che p=0, allora $\mu^{c.L}(x_1)=0$, se L_2 è tale che q=0 allora $\mu^{c.L}(x_1)=1$. In entrambi i casi, ponendo $\mu=\mu^{c.L}$ nella formula 4.23 si ottengono risultati corretti, anche se le valutazioni probabilistiche ivi contenute sono contraddittorie, infatti tutti gli addendi che dipendono da valutazioni contraddittorie sono nulli. In ogni caso, poichè B massimizza l'utilità attesa subordinatamente a h_2 (che è ovviamente l'unico insieme d'informazione rilevante rispetto a B) per qualche regola d'apprendimento coerente, B è effettiva e (a,B,a') è sostenibile come equilibrio semisequenziale Nash. Anche cambiando le funzioni di utilità u_1 e u_3 in modo che $u_1(z_1)>2$ e $u_3(z_2)>2$, (a,B,a') continua a essere sostenibile come equilibrio semisequenziale, infatti B è una strategia effettiva e 1 e 3 possono razionalmente credere di non poter ottenere guadagni maggiori di 2 scegliendo b e b'.

Sono opportune ancora due osservazioni:

a) il fatto che B sia un'azione irrazionale, dato h_2, per qualsiasi credenza "non estremista" (cioè tale $0<\mu(x_1)<1$) dipende da una particolare caratteristica di u_2: $u_2(z_2)=u_2(z_4)$ e $u_2(z_1)=u_2(z_3)$; se una di queste due eguaglianze non è valida, non si possono ottenere gli strani risultati visti sopra; ciò mostra che l'insieme di giochi con la struttura della figura 17, per i quali vale questo controesempio, è trascurabile rispetto all'insieme di tutti i giochi con la stessa struttura;

b) se si impone la condizione che ogni strategia debba essere una "best reply" anche contro strategie completamente miste, purchè "sufficientemente vicine" alle strategie pure a e a', si elimina lo strano equilibrio sequenziale (a,B,a'); si vedrà che imponendo questa condizione si ottengono i c.d. equilibri perfetti.

Lo studio dell'esempio 4.6 ha permesso di mettere in evidenza una carenza della razionalità sequenziale indipendente dalla plausibilità del sistema di credenze μ. Questo è un risultato di per sé stesso interessante. Infatti gli stessi Kreps e Wilson sono consci di alcune carenze del loro concetto di equilibrio, ma ritengono che, esplicitando le credenze e quindi permettendo di discuterle criticamente, si possano mettere in luce ed eliminare le ragioni degli equilibri sequenziali implausibili:

> "this is not to say that the sequential equilibrium concept eliminate all or even most implausible equilibria. But it does eliminate some, and, perhaps more importantly, it gives a. language for discussing why one equilibrium or another is implausible."(Kreps,Wilson [1982],p 886).

Si può dire che tutto questo capitolo sia orientato allo scopo di costruire un linguaggio per discutere criticamente la plausibilità degli equilibri a partire dalle congetture che li sostengono e dalle informazioni a priori dei giocatori con cui tali congetture sono compatibili. Forse proprio per questo si è potuto mettere in luce che il linguaggio elaborato da Kreps e Wilson con intenti analoghi è, almeno in certi casi, mal specificato.

Tuttavia con l'esempio 4.6 non si è potuto dimostrare che la malspecificazione della formula 4.23 ha delle conseguenze rilevanti, nel senso che permette di sostenere come equilibri sequenziali delle combinazioni di strategie che non sono nemmeno equilibri semisequenziali. Si è visto infatti che esiste un continuo di credenze che sostiene lo stesso equilibrio implausibile e tra queste due credenze "estremiste" rendono innocua la cattiva specificazione della 4.23. E' opinione dello scrivente che un salvataggio della 4.23 nei casi in cui è incoerente sia sempre possibile, ricorrendo a ipotesi secondarie opportune, che assegnino probabilità zero ad almeno uno e al più a k-1 dei k archi che portano in un insieme d'informazione h (con probabilità a priori nulla) e hanno un "gemello" che segue h. Ma anche se ciò fosse vero il problema sarebbe quello di dimostrare che per ogni equilibrio sequenziale (μ,σ) esiste un equilibrio sequenziale strategicamente equivalente (μ',σ) con una μ' "estremista" che rende innocua l'incoerenza della formula 4.23.

Fortunatamente non è necessario tentare una dimostrazione di questo genere. E' infatti possibile percorrere la strada indicata dalle ultime due osservazioni dell'esempio 4.6, mostrando che una sottoclasse degli equilibri sequenziali, gli equilibri perfetti, eliminando le possibili incoerenze della razionalità sequenziale, risulta essere inclusa nella classe degli equilibri semisequenziali e che l'insieme dei giochi per i quali gli equilibri sequenziali non sono perfetti è trascurabile (naturalmente quando si parla di relazioni d'inclusione tra classi di equilibri bisogna prima renderle tra loro omogenee, il modo più semplice è quello di proiettare tutto sullo spazio delle strategie Σ). Segue ora una definizione degli equilibri perfetti in termini di valutazioni, ripresa da Kreps e Wilson [1982], p 882.

Definizione 4.24. Una valutazione $(\mu,\sigma)\in\Omega$ è un equilibrio perfetto se esiste una successione $\{(\mu_m,\sigma_m)_{m=1}^{\infty}\}$ inclusa in Ω° e convergente a (μ,σ) tale che per ogni $m\in N$ e per ogni

$j \in I$ σ_j sia la miglior risposta contro $\sigma_m{}^j$

(4.24) $E(u_j|h,\mu_m,\sigma_j,\sigma_m{}^j) \geq E(u_j|h,\mu_m,\sigma_j{}',\sigma_m{}^j), j \in I, h \in H(X_j), m \in N, \sigma_j{}' \in \Sigma_j.$

E' intuibile che con un passaggio al limite nella (4.24) si può ottenere la razionalità sequenziale. In effetti un equilibrio perfetto può essere visto come un equilibrio sequenziale in cui la ottimalità di una strategia contro le altre è robusta rispetto alla possibilità che le altre strategie siano attuate con qualche errore di probabilità infinitesima. Vale infatti la seguente proposizione:

Proposizione: ogni equilibrio perfetto è un equilibrio sequenziale (Kreps, Wilson [1982], p 882).

Un esempio di equilibrio sequenziale non perfetto lo si è appena visto, si tratta delle strane valutazioni (μ,a,B,a') dell'esempio 4.6. La (4.24) implica che B deve essere ottimale anche rispetto a credenze "non estremiste" (perchè $(\mu_m,\sigma_m) \in \Omega^o$) e calcolando le probabilità in modo coerente. Poichè B non può soddisfare questi requisiti, l'equilibrio "implausibile" viene scartato.

Si mostrerà ora che ogni equilibrio perfetto è semisequenziale.

Teorema 4.6. Se la valutazione (μ,σ) è un equilibrio perfetto e ç corrisponde a σ, allora (ç,σ) è un equilibrio semisequenziale.

Dimostrazione. Se (μ,σ) è un equilibrio perfetto, allora è anche un equlibrio sequenziale e σ è un equilibrio Nash, quindi (ç,σ) è un equilibrio congetturale Nash. Affinchè (ç,σ) sia semisequenziale è perciò sufficiente che ogni $ç_j$ corrisponda a una combinazione di strategie altrui effettive; ma poichè ogni $ç_j$ corrisponde a σ_j, è sufficiente mostrare che che σ è una combinazione di strategie effettive. A questo scopo si costruirà un sistema di regole d'apprentimento L opportune, dimostrando che è coerente rispetto a Γ^o e che sostiene le strategie in σ come strategie effettive rispetto a Γ^o.

Dalla definizione 4.24 si sa che se (μ,σ) è perfetto allora esiste una valutazione strettamente positiva $(\mu_m,\sigma_m)\in\Omega^\circ$ tale che per ogni $j\in I$, ogni $h\in H(X_j)$ e ogni $\sigma_j'\in\Sigma_j$ vale la disuguaglianza

[1] $E(u_j|h,\mu_m,\sigma_j,\sigma_m^{j})\geq E(u_j|h,\mu_m,\sigma_j',\sigma_m^{j})$.

Inoltre, poichè (μ,σ) è un equilibrio sequenziale, per ogni $h\in H(X)$ vale

[2] $E(u_j|h,\mu,\sigma)\geq E(u_j|h,\mu,\sigma_j',\sigma^{j})$.

Si costruisca L nel modo seguente:

(a) se $h\in$Coe $\varsigma_{i(h)}$ allora $L(\varsigma_{i(h)},h)=\varsigma_{i(h)}$;

(b) se $h\in$Ref $\varsigma_{i(h)}$ allora $L(\varsigma_{i(h)},h)=\varsigma_{i(h)}{}^m$, dove $\varsigma_{i(h)}{}^m$ è la congettura di $i(h)$ corrispondente a $\sigma_m^{i(h)}$.

I requisiti (a) e (b) sono sufficienti affinchè le regole d'apprendimento che formano L siano coerenti rispetto a Γ°. Infatti la (4.17) è soddisfatta perchè ogni nuova congettura continua ad essere compatibile con Γ°, in quanto corrispondente a una combinazione di strategie altrui. La (4.15) è implicata da (a) (ogni giocatore mantiene le sue congetture iniziali finchè non vengono falsificate) e la (4.16) equivale in questo caso alla (4.15) perchè ogni giocatore in base ad L cambia congettura una volta al massimo. La (4.14) è implicata da (b), perchè σ_m è positiva, cioè contiene strategie completamente miste.

Date queste regole d'apprendimento, risultano valide le seguenti uguaglianze:

se $x\in h\in$Coe $\varsigma_{i(h)}$, allora $\mu(x)=\mu^{c.L}(x)$;

se $x\in h\in$Ref $\varsigma_{i(h)}$, allora $\mu_m(x)=\mu^{c.L}(x)$;

ciò implica (tenendo conto che $\varsigma_{i(h)}$ corrisponde a $\sigma^{i(h)}$ e che $\varsigma_{i(h)}{}^m$ corrisponde a $\sigma_m^{i(h)}$)

- se $h\in$Coe ς_j, $E(u_j|h,\mu,\sigma_j',\sigma^{j})=E(u_j|h,\varsigma_h^{L},\sigma_h')$ (si ricorda che σ_h' è la restrizione di σ_j' su sulla forma decisionale estesa δ_h), $\sigma_j'\in\Sigma_j$;
- se $h\in$(Ref c_j), $E(u_j|h,\mu_m,\sigma_j',\sigma_m^{j})=E(u_j|h,\varsigma_h^{L},\sigma_h')$, $\sigma_j'\in\Sigma_j$

Tenendo conto che Coe e Ref formano una partizione di $H(X_j)$, cioè che per ogni ς_j (Coe ς_j)U(Ref ς_j)$=H(X_j)$, dalle suddette uguaglianze e dalle disuguaglianze [1] e [2] si deduce che per ogni j e per ogni $h \epsilon H(X_j)$

$$E(u_j | h, \varsigma_h^L, \sigma_h) \geq E(u_j | \varsigma_h^L, \sigma_h'), \quad \sigma_j' \epsilon \Sigma_j$$

e quindi ogni σ_j è supereffettiva e a maggior ragione effettiva. ∎

Corollario 4.3. Per ogni gioco finito in forma estesa Γ^o esiste almeno un equilibrio semisequenziale.

Dimostrazione. Per ogni Γ^o esiste almeno un equilibrio perfetto (μ, σ) (cfr Selten [1975] e Kreps e Wilson [1982]) quindi il teorema 4.6 implica che esiste almeno un equilibrio semisequenziale. ∎

La seguente proposizione mostra che se mai esistono casi di equilibri sequenziali che non sono empiricamente equivalenti a equilibri semisequenziali, essi possono al più verificarsi per un insieme trascurabile di giochi.

Proposizione: fissata la struttura $(T,<;A,\alpha;I,i;H)^o$ e la distribuzione r^o e per una generica u ogni equilibrio sequenziale è empiricamente equivalente ad un equilibrio perfetto (Kreps e Wilson [1982], p 882, theor.3).

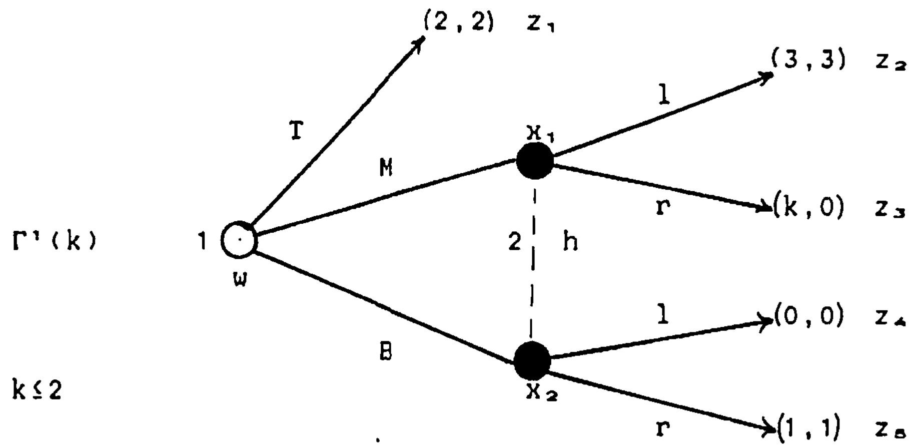
Gli equilibri sequenziali e perfetti eliminano molti casi di minaccie non credibili, ma possono essere implausibili perchè implicitamente basati su regole d'apprendimento poco credibili. Si mostrerà ora come in alcuni casi emblematici queste regole d'apprendimento "poco credibili" sono generalmente considerate tali perchè gli agenti non si spingono abbastanza avanti nel processo delle congetture reciproche: essi ritengono che gli altri siano razionali e informati, ma non necessariamente che ognuno degli altri ritenga che gli altri siano razionali e informati. Si tratta cioè di equilibri che sono semisequenziali, ma non semisequenziali di 2° grado. Inoltre gli equilibri perfetti e sequenziali non sono robusti rispetto a trasformazioni intuitivamente irrilevanti della struttura del gioco. Si mostrerà che, almeno per i giochi esaminati, ciò dipende dal fatto che tali equilibri sono equilibri Nash in strategie supereffettive. Invece quegli equilibri semisequenziali che sono anche equilibri Nash, sono costituiti da strategie effettive e ciò fa si che essi siano robusti rispetto alle trasformazioni irrilevanti.

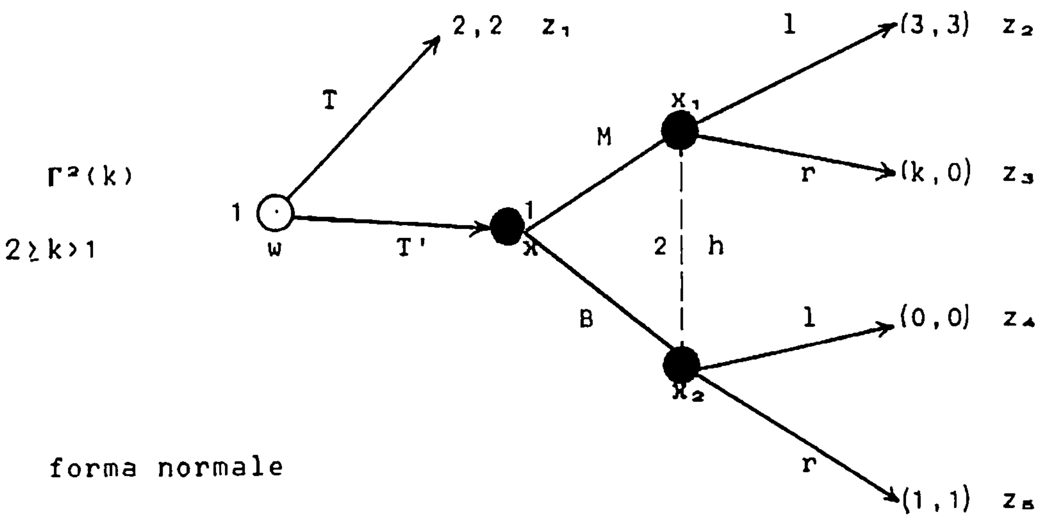
Esempio 4.7. La discussione sarà condotta in termini di esiti di equilibrio, perciò non si distinguerà tra due diversi equilibri empiricamente equivalenti. Ad esempio se $z \in Z$ è sostenuto da un equilibrio perfetto, si dirà semplicemente che z è un equilibrio perfetto.

Nella figura 18 sono rappresentati due giochi ripresi da un articolo di Kholberg e Mertens (K.,m. [1986], pp 1007-8). Entrambi sono parametrizzati, perchè è posto uguale a k un valore della funzione di utilità del giocatore 1: $u_1(z_3)=k$, $k \leq 2$. Per entrambi i giochi l'insieme dei risultati Z e le funzioni di utilità $u:Z \to R^2$ sono uguali, lo stesso vale per le azioni e la struttura dell'informazione di 2. L'unica differenza è che in $\Gamma^1(k)$ il giocatore 1 sceglie tra tre alternative T, M, B, mentre nel gioco $\Gamma^2(k)$ fa un scelta iterata: prima sceglie tra T e (M o B) e poi, eventualmente, sceglie tra M e B. Intuitivamente non dovrebbe esistere nessuna differenza tra i due modo di procedere da parte di un giocatore razionale, ma in base alle nozioni di equilibrio sequenziale e perfetto non è così.

Si consideri $\Gamma^1(k)$. z_1 è un equilibrio sequenziale sostenuto da una qualsiasi valutazione (μ,T,r) con $\mu(x_1) \leq 1/4$. Si può anche verificare che, se $k<2$, z_1 è un equilibrio perfetto ed è banale verificare che z_1 è semisequenziale: qualsiasi regola d'apprendimento L_2 coerente con $\Gamma^0=\Gamma^1(k)$ e tale che $\mu^{c,L}(x_1) \leq 1/4$ sostiene z_1 come equilibrio semisequenziale . Ma si può sostenere che z_1 non è plausibile. Infatti T domina strettamente B, mentre non esiste nessuna relazione di dominanza tra T e M. Se 2 si trovasse in h dovrebbe pensare che 1, avendo subito scartato la strategia dominata B, tra T e M ha scelto M, oppure le ha assegnato almeno una probabilità positiva. Ciò implica $\mu(x_1)=1$ e quindi 2 in h dovrebbe scegliere l, non r. Supponendo ciò 1 dovrebbe scegliere M che, data l, gli procura un'utilità maggiore. L'unico equilibrio plausibile è perciò z_2, che tra l'altro è anche Pareto efficiente (ma va ricordato che esistono equilibri Pareto efficienti basati su promesse non credibili e quindi non sequenziali). Questo ragionamento può essere espresso con il lin-

__Un caso di equilibrio sequenziale e perfetto poco "plausibile" e non robusto rispetto a cambiamenti irrilevanti della forma estesa.__





forma normale

1 \ 2	l	r
T (TM o TB)	2, 2	2, 2
M o T'M	3, 3	k, 0
B o T'B	0, 0	1, 1

z_1 è un equilibrio perfetto (se $k<2$) sequenziale e semisequenziale nel gioco $\Gamma^1(k)$, ma non è plusibile, perchè 2 sa di non potersi trovare in x_2 e quindi sa che è razionale scegliere r; 1, immaginando il ragionamento di 2, sceglie M. Inoltre z_1 non è più un un equilibrio perfetto o sequenziale in $\Gamma^2(k)$ (se $k>1$). Infatti la razionalità sequenziale impone di massimizzare sul nodo x, che quando 1 sceglie T è irrilevante. Invece sia in $\Gamma_1(k)$ sia in $\Gamma^2(k)$ l'insieme degli equilibri semisequenziali è $\{z_1, z_2\}$ e l'insieme degli equilibri semisequenziali di 2°grado è $\{z_2\}$.

figura 18

guaggio qui introdotto. z_1 è un equilibrio semisequenziale tale che la congettura di 1 corrisponde a una strategia di 2 che è effettiva rispetto all'informazione completa, ma non rispetto all'informazione secondo cui 1 è completamente informato e razionale: $r \in \Sigma_2^{\bullet}|\Gamma^o$, ma r non appartiene all'insieme $\Sigma_{2\bullet}|(\Sigma_{1\bullet}|\Gamma^o)$. Infatti $\Sigma_{1\bullet}|\Gamma^o$ contiene T,M e tutte le loro combinazioni lineari, ma non contiene nessun altra strategia pura o mista, perchè B, essendo strettamente dominata (su un insieme d'informazione per essa rilevante,$\{w\}$) non può essere effettiva; lo stesso vale per tutte le strategie miste che assegnano a B una probabilità positiva. $M \in \Sigma_{1\bullet}|\Gamma^o$ e quindi se 2 si trova in h ed è informato sul fatto che 1 adotta una strategia effettiva, egli dovrà adottare una nuova congettura che assegna a M una probabilità positiva e a x_1 una probabilità unitaria subordinatamente ad h. Se 1 sapesse che 2 dispone di queste informazioni a priori, l'unica scelta razionale sarebbe M. Ciò mostra che l'unico equilibrio semisequenziale di 2° grado è quello "plausibile" z_2. Ma prima di sentenziare sulla plausibilità di un equilibrio sarebbe meglio chiarire che ipotesi si fanno sulle informazioni a priori dei giocatori. z_1 è un equilibrio semisequenziale e ciò significa che è perfettamente plausibile finchè si assume soltanto che i giocatori siano completamente informati e consci del fatto che anche gli altri sono razionali e completamente informati. Infatti tale assunzione non implica che 1 debba immaginare che 2 lo ritiene razionale e informato.

Si consideri il gioco $\Gamma^2(k)$. Le differenze rispetto al gioco precedente sono intuitivamente irrilevanti dal punto di vista dell'azione razionale dei giocatori e ci si dovrebbe aspettare che gli equilibri semisequenziali e semisequenziali di secondo grado siano sempre gli stessi. In effetti è così. (T,B) continua a essere una strategia effettiva rispetto a $\Gamma^o = \Gamma^2(k)$, perchè l'insieme d'informazione $\{x\}$ è irrilevante rispetto a (T,B) ($\{x\}$ non $\in$ Rel(T,B)) e quindi non ha importanza che B possa essere strettamente dominata su $\delta_{\{x\}}$(il corollario 4.2 afferma che σ_j non è effettiva rispetto a Γ^o se è strettamente dominata su δ_h e $h \in \mathrm{Rel}\ \sigma_j$). Anche r continua ad essere effettiva rispetto a Γ^o, infatti l'informazione completa non vieta a 2 di assegnare a x_1 una probabilità subordinata $\mu^{c \cdot L}(x_1) \leq 1/4$. Quindi T (cioè (T,M) o (T,B)) è credibile da parte di 2, r è credibile da parte di 1 e entrambe sono miopicamente razionali relativamente alle corrispondenti congetture. Ragionamenti pressochè identici a quelli fatti per il gioco precedente mostrano che l'unico equilibrio semisequenziale di 2° grado è z_2.

Ma z_1 non è un equilibrio sequenziale se $1<k\leq 2$ (nel gioco precedente l'unica condizione era $k\leq 2$). Infatti (T,B) è strettamente dominata su $\delta_{(x)}$ e quindi non può essere supereffettiva; la condizione della razionalità sequenziale è violata. L'unico equilibrio sequenziale per questo gioco è z_2. Ciò mostra due cose. Anzitutto dando rilevanza a ciò che è un puro artificio matamatico nella definizione delle strategie (cioè la prescrizione di azioni relativamente ad insiemi d'informazione irrilevanti), si fanno dipendere i risultati da particolari trascurabili nella definizione della forma estesa. D'altra parte questo secondo gioco mostra anche che certe volte il riferimento alle strategie supereffettive equivale a spingersi fino al secondo grado nelle aspettative reciproche. Questo però è evidentemente un risultato contingente. Meglio quindi continuare a basarsi sulle strategie effettive e usare l'equilibrio semisequenziale del grado che si ritiene opportuno.

Kohlberg e Mertens richiedono che un equilibrio sia sequenziale per ogni gioco in forma estesa che abbia la medesima forma normale. Essi mostrano che questa proprietà è soddisfatta dagli equilibri propri, che sono un sottoinsieme degli equilibri perfetti relativi alla forma normale dei vari giochi tra loro "equivalenti". Nei giochi in forma estesa in cui ogni giocatore ha un solo insieme d'informazione, gli equilibri perfetti della forma estesa coincidono con quelli della forma normale e quindi per questi giochi ogni equilibrio proprio è perfetto. Non si esporrà formalmente anche il concetto di equilibrio proprio. Ci si limita a darne una comprensione intuitiva. Si adotta anzitutto l'approccio degli equilibri perfetti: un equilibrio deve essere robusto rispetto alla possibilità che gli agenti commettano errori nella attuazione delle strategie con probabilità "piccole a piacere". Se si impone la condizione che gli errori più costosi siano commessi con una probabilità che tende a zero più velocemente rispetto a quella degli errori meno costosi, si ottengono gli equilibri propri. Per esempio nel gioco $\Gamma'(k)$

della figura 18, se $k>1$ e la probabilità di scegliere M per errore è δ, allora la probabilità di sceglire B deve essere δ^2, perchè M>B e, indipendentemente dalla strategia di 2, B è un errore più costoso di M (ovviamente T viene scelta con una probabilità $1-\delta-\delta^2$). Per $\delta \to 0$ si ottiene z_3 come unico equilibrio "robusto".

Si può però mostrare che anche gli equilibri propri possono essere implausibili. Basta considerare il gioco $\Gamma'(0)$ del precedente esempio. Poichè non esistono relazioni di dominanza tra M e B, quale sia "l'errore più costoso" dipende dalla strategia di 2. E' perciò possibile ottenere z_1 come equilibrio proprio (Kohlberg, Mertens [1986]).

Si è detto in precedenza che gli equilibri sequenziali eliminano le minacce (e le promesse) non credibili, ma non le regole d'apprendimento non credibili. Si è inoltre puntualizzato che le affermazioni intorno alla credibilità di certe strategie oppure di certe regole d'apprendimento andrebbero basate su precise ipotesi intorno alle informazioni a priori dei giocatori riguardo alle regole del gioco e al comportamento altrui. Tali ipotesi sono state precisate in base alla definizione delle congetture compatibili con la struttura dell'informazione H^0 e con la distribuzione degli stati di natura r^0 e soprattutto con la definizione ricorsiva delle congetture ragionevoli di grado k. Si è mostrato con degli esempi che certi equilibri sono considerati implausubili perchè sono basati su congetture ragionevoli di grado 0, ma non ragionevoli di grado 1; si trattava cioè di equilibri congetturali sostenuti da congetture compatibili con l'informazione completa, ma non con la razionalità altrui, data l'informazione completa. In base alla definizione 4.21 ciò equivale a dire che quegli equilibri sono implausibili perchè non sono semisequenziali. L'esempio paradigmatico di un equilibrio non semisequenziale è quello del gioco della minaccia, nel caso in cui il giocatore minacciato cede alla volontà del minacciante per paura che questi possa realmente mettere in atto la sua minaccia. Altri equilibri sono considerati implausibili perchè sono sostenuti da congetture ragionevoli di grado 1, ma non ragionevoli di grado 2. Ciò è stato mostrato con l'esempio 4.7. In questo caso l'equilibrio implausibile era sostenuto da una congettura del giocatore 1, che implicitamente attribuiva a 2 una regola d'apprendimento non coerente con l'informazione a priori secondo cui 1 era un giocatore informato e razionale. Secondo la definizione 4.20 questa congettura non è ragionevole di 2° grado. L'esempio 4.7 ha anche mostrato che l'insieme degli equilibri sequenziali può coincidere con quello degli equilibri semisequenziali oppure con quello degli equilibri semisequenziali di 2° grado, strettamente incluso nel precedente, e che ciò dipende da particolari intuitivamente irrilevanti nella specificazione della forma estesa. Questa è la spiacevole conseguenza del fatto che vengono imposti alle strategie dei vincoli di razionalità relativi ad insiemi d'informazione irrilevanti per quelle strategie. Cioè si richiede che una strategia per essere credibile debba essere supereffettiva, mentre è sufficiente la richiesta più debole che la strategia sia effettiva.

Uno dei requisiti richiesti da Kohlberg e Mertens affinchè un equilibrio sia "stabile" è che esso non venga eliminato trasformando il gioco mediante l'eliminazione di strategie dominate. Poichè tutti i giocatori dovrebbero essere a conoscenza di ciò, un equilibrio veramente stabile dovrebbe "resistere" alla eliminazione iterativa delle strategie dominate. In altre parole, se Γ è il gioco assegnato e Γ^N è la forma normale di Γ, un equilibrio σ di Γ e Γ^N dovrebbe corrispondere a un equilibrio σ'del gioco $\Gamma^{N'}$ ottenuto eliminando da Γ^N una strategia dominata di un giocatore. A sua volta σ' dovrebbe corrispondere a un equilibrio σ'' del gioco $\Gamma^{N''}$ ottenuto eliminando da $\Gamma^{N'}$ una strategia dominata di un altro (o anche dello stesso) giocatore; σ''dovrebbe corrispondere a un equilibrio σ''' ricavato nello stesso modo e così di seguito (Kohlberg, Mertens [1986], p 1014). Gli stessi autori riconoscono che non necessariamente esiste un equilibrio stabile rispetto a qualsiasi successione di eliminazioni di strategie dominate, essi tuttavia richiedono almeno che che l'insieme di equilibri stabili per Γ contenga l'insieme di equilibri stabili per qualsiasi Γ' ottenuto da Γ con l'eliminazione di una strategia dominata.

La scelta di strategie non dominate è ovviamente compatibile con la razionalità, intesa come massimizzazione dell'utilità attesa (quando esiste informazione completa).

Tuttavia l'ipotesi che un giocatore scelga soltanto strategie non dominate non può essere dedotta dal postulato di razionalità, da cui è invece banalmente deducibile la regola di scegliere strategie non strettamente dominate. Tuttavia l'eliminazione di straegie dominate può essere in certi casi giustificata in base al postulato di razionalità. Non si tratta però di un'eliminazione ad opera di chi deve scegliere la strategia, si tratta della non considerazione di una strategia dominata in quanto strumento previsivo da parte di un altro giocatore che cerca di capire come il primo reagirebbe a certi eventi. Si è visto che, se k considera j razionale e informato, allora una una strategia pura non effettiva di j non può essere ritenuta da k un buon strumento previsivo del comportamento di j (se inoltre l'insieme delle strategie effettive di j è convesso, si può addirittura affermare che nessuna strategia non effettiva pura o mista di j è utilizzabile a fini previsivi). Si è inoltre mostrato (corollario 4.2) che una strategia strettamente dominata in un insieme d'informazione h (per essa rilevante) certamente non può essere effettiva. Ma una strategia strettamente dominata in h può non essere strettamente dominata, perchè $o >_h o'$ non implica $o > o'$. Quindi la non considerazione di una strategia non effettiva di j da parte di qualche altro giocatore k può in certi giochi essere equivalente alla non considerazione di una strategia dominata (l'esempio più banale è il gioco della minaccia: il giocatore minacciato, sapendo che l'altro giocatore è razionale, considera la strategia di minaccia irrilevante a fini previsivi, cioè non credibile, e tale strategia è strettamente dominata in {x}, ma è dominata non strettamente quando si considera il gioco nel suo complesso, o equivalentemente la forma normale). Si supponga ora che ci siano due giocatori, j e k, e che j sia dotato di congetture ragionevoli di secondo grado. Per capire quale sarà la scelta di k egli considererà dapprima il gioco Γ' ottenuto da Γ eliminando tutte le le sue (di j) strategie pure non effettive e quindi tutte le sue strategie strettamente dominate in qualche h per esse rilevante; poi eliminerà da Γ' tutte le strategie di k non effettive in Γ', ottenendo un nuovo gioco Γ''. Con questo procedimento il giocatore 1 nell'esempio della figura 18 è in grado di selezionare un 'unica congettura ragionevole di 2° grado, quella secondo cui 2 sceglie r, e la sua scelta razionale diventa una banalità. In giochi più complessi il procedimento potrebbe continuare. Si è così mostrato che l'eliminazione iterata delle strategie non effettive può portare alla determinazione di un equilibrio semisequenziale di grado k e in ogni caso, se l'eliminazione è iterata k volte, nessun equilibrio di grado k o maggiore di k può essere eliminato. Si noti però che l'iterazione è un processo determinato e distinto per ogni giocatore, non ha nulla di arbitrario. Quando con questo procedimento si riesce a selezionare non un unico equilibrio, ma un'unica combinazione di strategie razionali rispetto a qualsiasi costellazione di congetture di ragionevoli di grado (k-1), certamente si può affermare che la conoscenza è completamente condivisibile e che le congetture ragionevoli di grado k rappresentano una conoscenza completamente condivisa.