4.PROPRIETA' DELLE CONGETTURE E DEGLI EQUILIBRI

Nel precedente capitolo si è usato in modo intuitivo il concetto di compatibilità delle congetture con determinate informazioni sul gioco. Ad esempio si è parlato di congetture "costanti", secondo le quali il giocatore che le adotta ritiene le strategie altrui indipendenti dalla propria, e si è accennato al fatto che in giochi a informazione completa (o perlomeno in cui sia completamente nota la struttura dell'informazione) le congetture devono necessariamente godere di tale proprietà. Si è inoltre accennato al fatto che per ottenere il concetto di equilibrio Nash da quello più generale di equilibrio congetturale è necessario (ma non sufficiente) ipotizzare che le congetture dei giocatori siano costanti. In questo caso infatti la congettura di ogni giocatore è equivalente all'ipotesi che gli altri adottino una data strategia e, secondo l'ipotesi di razionalità miope, tale giocatore sceglierà una strategia di "best-reply" rispetto alle ipotetiche strategie altrui . Supponendo che la scelta miopicamente razionale da parte di tutti i giocatori sia tale da rendere corrette le rispettive ipotesi, si ottiene un equilibrio Nash cioè uno stato nel quale nessun giocatore può ottenere incrementi di utilità mediante deviazioni unilaterali dalla strategia adottata.

Nello studio del gioco di minaccia (paragrafo 3.6, figure 4,5 e 6) e nella discussione delle carenze della forma normale (paragrafo 3.6) si è inoltre accennato a concetti di equilibrio più restrittivi e in un certo senso più ragionevoli rispetto all'eqilibrio Nash. Ad esempio si è notato che la minaccia del giocatore 2 non è credibile (si veda la figura 4), infatti se egli venisse a trovarsi nella condizione di doverla attuare, non avrebbe alcun interesse a farlo (ammesso che il gioco descriva in modo esauriente tutti gli aspetti rilevanti). Naturalmente, affinchè il giocatore 1 possa correttamente anticipare tutto ciò, è necessario che egli sia completamente informato (e quindi conosca la funzione di utilità di 2) e inoltre che ipotizzi un comportamento razionale da parte del giocatore 2. In questo caso il giocatore 1 deciderà di non cedere alla minaccia e il giocatore 2 a fronte di ciò deciderà di non attuarla. A tale proposito va osservato che:

a) quanto detto sopra può esprimersi anche dicendo che esiste solo una congettura del giocatore 1 compatibile con l'informazione completa e con l'ipotesi (corretta) che il giocatore 2 si comporti razionalmente, tale congettura assegna una probabilità pari a uno al fatto che il giocatore 2 non attui la minaccia, subordinatamente a tale congettura 1 massimizza l'utilità (attesa) non cedendo alla minaccia, 2 razionalmente non la mette in atto e con ciò conferma la congettura di 1;

b) ragionamenti del tipo di quelli menzionati sopra hanno condotto alla definizione di concetti di equilibrio più forti rispetto all'equilibrio Nash (equilibri perfetti, sequenziali ecc.), tuttavia il ruolo di tali ragionamenti è puramente euristico e le considerazioni sulle informazioni relative al gioco e al comportamento altrui hanno una funzione puramente interpretativa, anche se fondamentale.

Da quanto sopra si evince che le proprietà delle congetture sono fondamentali, perchè vincolando le congetture al soddisfacimento di determinate proprietà si restringe l'insieme degli equilibri congetturali ed è possibile ottenere i concetti di equilibrio della letteratura come casi particolari.

Inoltre è evidente che le proprietà delle congetture vanno messe in relazione con le informazioni "a priori" possedute dai giocatori, cioè le informazioni relative alla forma del gioco e al comportamento altrui. Quanto più precise ed esaurienti saranno le informazioni a priori dei giocatori, tanto più ristretto sarà l'insieme delle congetture compatibili con tali informazioni.

Nel capitolo 3 si è distinto tra teoria e congettura di un agente. La teoria si trova a un livello logico più elevato della congettura, poichè si intende per teoria una struttura formale dalla quale è possibile dedurre una congettura. Di conseguenza, ammesso che una teoria sia completa, da essa è possibile derivare un'unica congettura, mentre una congettura è compatibile con più di una teoria. Ciò è dovuto al fatto che una congettura contiene solo le informazioni indispensabili per assegnare a ogni programma d'azione (strategia) un distribuzione di probabilità sullo spazio delle conseguenze rilevanti, mentre in generale la teoria sottostante sarà più ricca e dirà qualcosa sul perchè da certe azioni dovrebbero derivare certe conseguenze (eventualmente probabilistiche). E' chiaro quindi che, mentre per definire un generico equilibrio è sufficiente fare riferimento al nesso azioni-conseguenze, cioè alle congetture, per discutere delle proprietà di queste ultime in termini di compatibilità con certe informazioni a priori è necessario inquadrare tali informazioni nell'ambito di una teoria e da questa derivare dei vincoli sulle congetture.

Nei paragrafi che seguiranno mi propongo quindi di assegnare un oggetto matematico al concetto di teoria di un agente in un contesto di gioco. Tale formalizzazione permetterà di dare una funzione matematica e non solo euristico-interpretativa all'ipotesi che gli agenti dispongano di certe informazioni a priori. Dalla progressiva incoporazione di informazioni nelle teorie dei giocatori sarà possibile derivare vincoli sempre più stretti (ovvero proprietà sempre più forti) per le congetture e quindi per gli equilibri. Seguirà una interpretazione di alcuni dei più importanti concetti di equilibrio della letteratura corrente come equilibri congetturali in cui le congetture sono compatibili con determinate informazioni sul gioco e/o sul comportamento degli altri giocatori.

Particolare attenzione sarà dedicata ai rapporti tra equilibri congetturali ed equilibri Nash e relativamente a ciò saranno dimostrati alcuni teoremi di esistenza e di impossibilità.

La formalizzazione di determinati requisiti di razionalità del comportamento altrui nell'ambito della teoria di un giocatore porterà a precisare il postulato di razionalità rispetto alla versione fornita nel precedente capitolo, mettendo in evidenza le regole di apprendimento. Su di esse si può dire ben poco nell'ambito dell'individualismo metodologico, perchè non è possibile produrre alcun algoritmo "razionale" che descriva un processo di reale apprendimento; tuttavia quel poco è sufficiente per escludere alcuni svolgimenti di un gioco e dunque per vincolare le possibili congetture di giocatori ben informati. Ancora una volta il caso del gioco di minaccia è paradigmatico. Anche se il giocatore 2 sceglie la strategia della minaccia confidando nell'arrendevolezza di 1, a fronte della resistenza di questi dovrà cambiare congettura e rivedere i suoi piani, deviando dalla strategia precedentemente adottata. Dunque la sua strategia effettiva sarà diversa da quella inizialmente scelta, ma è proprio tale strategia effettiva quella rilevante per il ben informato giocatore 1.

Con questa struttura concettuale si affronteranno i problemi relativi alla "backward induction" (tentativo di calcolare le strategie ottimali partendo dai nodi finali del gioco e selezionando in modo iterativo le azioni che massimizzano l'utilità del giocatore pertinente) e si discuteranno quei concetti di equilibrio che vi fanno riferimento.

4.1. Teorie e congetture degli agenti: definizione delle teorie e compatibilità delle congetture con informazioni a priori date.

Poichè la teoria di un giocatore è una struttura più ricca della congettura da essa derivabile, definire una teoria sarà un problema più complesso che definire una congettura. In effetti una definizione completamente rigorosa comporterebbe l'esposizione di concetti matematici assai più sofisticati di quelli finora utilizzati e la trattazione ne sarebbe assai appesantita. D'altra parte lo scopo della definizione in questione è principalmente quello di derivare in modo sistematico vincoli sempre più stringenti sulle congetture e, tenendo conto di ciò, i benefici di un completo rigore non sembrano superare i relativi costi. Perciò ci si limiterà a una esposizione prevalentemente discorsiva, introducendo di volta in volta formule, la cui completa comprensione non sarà essenziale, ma che indicheranno su quali linee procedere per elaborare una formalizzazione rigorosa; tali indicazioni sono soprattutto rivolte a chi ha una certa familiarità con la teoria della misura e dell'integrazione astratta.

La struttura delle conoscenze e opinioni di un individuo che agisce nel contesto di un gioco può essere esaminata in base a due fondamentali caratteri dicotomici. Anzitutto si deve specificare se tali conoscenze e opinioni riguardano il gioco (cioè la sua forma estesa) oppure il comportamento degli altri giocatori, una volta che ne siano stati fissati il numero, le possibilità decisionali e le preferenze (tutti elementi che vengono specificati dalla forma estesa del gioco). Qualcuno potrebbe essere tentato dall'idea di eliminare questo secondo aspetto, riducendolo al primo sulla base dell'ipotesi che gli altri giocatori sono "razionali", ma tale tentativo solleva due fondamentali obbiezioni:

a) non necessariamente un giocatore razionale deve ipotizzare che anche i suoi avversari lo siano e in generale egli avrà interesse a sfruttare la (o cautelarsi dalla) loro eventuale irrazionalità (cfr von Neumann, Morgenstern [1980], p 32: gli autori affermano che le regole del comportamento razionale devono tenere conto della eventuale irrazionalità del comportamento altrui, ma ciò che distingue la presente impostazione da quella dei "padri fondatori" è che essi aspiravano a determinare pressochè univocamente tale comportamento costruendo una teoria oggettiva e normativa al tempo stesso - si veda in proposito il paragrafo 2.4);

b) in generale è difficile, se non impossibile, dare una definizione rigorosa di comportamento razionale, che determini univocamente tale comportamento; infatti, se si tiene presente l'enunciato del postulato di razionalità (paragrafo 3.4), risulta evidente che si deve in qualche modo caratterizzare la "razionalità" di una congettura per ottenere l'univocità e nel far ciò si corre il rischio di cadere in circoli viziosi di aspettative reciproche.

L'altro criterio dicotomico in base al quale classificare le conosceze e opinioni di un giocatore è quello della certezza o incertezza. Un individuo j può avere delle conoscenze o opinioni certe relativamente a un evento (e) e in tal caso (e) è (per j) un evento certo oppure un evento impossibile, cui j assegna una probabilità unitaria o nulla rispettivamente. Oppure j può ritenere (e) possibile, ma non certo e assegnerà ad (e) una probabilità minore o uguale a uno. Tale probabilità potrà anche essere nulla ma ciò accadrà soltanto se (e) è un evento "piccolissimo"; per esempio (e) potrebbe essere l'evento "Γ è tale che $u_i(z)=1$ per ogni $z \in Z$ e ogni $i \in I$", j può ritenere possibile questo evento e attribuirgli una probabilità nulla, perchè esso corrisponde soltanto a un <u>punto</u> dello spazio euclideo $R^{n(\#Z)}$ (per $n:=\#I$ e Z fissati) ; tuttavia j assegnerà una probabilità positiva a ogni evento che corrisponde ad un insieme aperto in $R^{n(*z)}$ che contiene detto punto, se così non fosse, cioè se j assegnasse una probabilità nulla per qualche aperto contenente quel punto, ciò significherebbe che j ritiene (e) impossibile.

Dalla sovrapposizione dei due criteri dicotomici suddetti risulta che la teoria di un giocatore j è costituita da quattro componenti fondamentali:

1) conoscenze e opinioni certe sul gioco;

2) conoscenze e opinioni certe sul comportamento altrui;

3) conoscenze e opinioni incerte sul gioco;

4) conoscenze e opinioni incerte sul comportamento altrui.

Le componenti 3) e 4) sono rappresentate mediante l'assegnazione di probabilità (ovviamente soggettive) a eventi ritenuti possibili. Si introdurrà ora un linguaggio matematico atto a descrivere queste quattro componenti (si veda anche lo schema nella figura 10) .

1) Certezza sul gioco. Per il giocatore j il gioco a cui deve giocare è qualcosa di (soggettivamente) aleatorio, perchè egli è ignorante su una parte delle regole (che, tra l'altro, descrivono importanti caratteristiche dei compagni di gioco). Tuttavia egli è certo di alcune proprietà del gioco. Ad esempio, data l'ipotesi di informazione personale completa, j conosce l'arborescenza del gioco, sa quando gli tocca muovere e cosa può fare , conosce la sua struttura dell'informazione e la sua funzione di utilità, dunque egli è certo che il gioco appartiene ad un insieme di giochi (in forma estesa) per i quali tali componenti sono quelle a lui note.

Quanto sopra può essere espresso matematicamente mediante l'uso della seguente notazione:

simbolo	significato
$.(\Gamma)_j$	gioco in forma estesa soggettivamente aleatorio per j;
$.\Gamma$	generico gioco in forma estesa, ovvero generica determinazione di un gioco aleatorio;

Teoria di un giocatore: schema.

j: generico giocatore considerato.

le conoscenze e opinioni di j sono		j ha conoscenze e opinioni certe sul GIOCO	j ha conoscenze e opinioni certe sul COMPORTAMENTO ALTRUI
	CERTE	-j dispone di INFORMAZIONE PERSONALE COMPLETA -se j è certo che y^o è una componente del gioco allora usa $\mu_j(.\|y^o)$	le ipotesi comportamentali di j sugli altri giocatori sono rappresentate da (n-1) corrispondenze $B_j^k: G \Rightarrow S[k],\ k \in I \setminus \{j\}$ $S[k] := \cup_{\Gamma\in G} S[k,\Gamma]$ tali che $B_j^k(\Gamma)$ è non vuoto per ogni k e ogni $\Gamma \in G$ (j è coerente)
	INCERTE	l'incertezza di j è rappresentata da un gioco aleatorio $(\Gamma)_j$ definito da uno spazio di misura $(G, \sigma a(G), \mu_j)$ con $\mu_j: \sigma a(G) \to [0,1]$ misura di probabilità	per ogni Γ assegnato l'incertazza di j è rappresentata da (n-1) distrib. di probabilità $b_{jk}^{\Gamma}: B_j^K(\Gamma) \to (0,1]$, posto $b_j^{\Gamma}(s^j) := \prod_{k\in I\setminus\{j\}} b_{jk}^{\Gamma}(s_k)$, si ottiene una applicaz. $b_j: G \to \{b_j^{\Gamma}: ...\}$

figura 10

.Γ°	gioco specificato dal modello (il gioco "vero" noto al teorico);
.G	insieme dei giochi in forme estesa (secondo la definizione del paragr.3.1)

Sia y una qualsiasi componente di Γ e y° la componente corrispondente in Γ° (per esempio potrebbe essere $y=(T,<)$ e $y^{\circ}=(T,<)^{\circ}$); un evento $\{e\}$ riguardante il gioco può sempre essere rappresentato così: $\{e\}:=\{\ (\Gamma)_j \varepsilon E$ incluso in $G\}$; in particolare l'evento secondo il quale y° è una componente di $(\Gamma)_j$ è: $\{(\Gamma)_j \varepsilon \{\Gamma \varepsilon G: y=y^{\circ}\}\}$. Poichè si è in tal modo stabilita una corrispondenza biunivoca tra eventi relativi al gioco e sottoinsiemi di G, la probabilità che j attribuisce all'evento $\{e\}$ può essere assimilata a una misura dell'insieme E tale che, se $\{e\}$ è certo, la misura di E è uno, se $\{e\}$ è impossibile, la misura di E è zero. Sia dunque $\mu_j(E)$ la misura di probabilità assegnata da j a E, l'ipotesi di informazione personale completa è:

$$\mu_j(\{\Gamma \varepsilon G:(T,<;X_j,H(X_j),\alpha[S(X_j)],u_j)=(T,<;X_j,H(X_j),\alpha[S(X_j)],u_j)^{\circ}\})=1. \quad (4.1)$$

si aggiunge inoltre $\mu_j(\{\Gamma \varepsilon G:(I,i)=(I,i)^{\circ}\})=1;$

la seconda parte della (4.1) è un'ipotesi che si fa per non appesantire la trattazione; non si tratta di un ipotesi molto restrittiva perchè la informazione incompleta su (I,i) può essere adeguatamente rappresentata come informazione imperfetta sugli stati di natura (con un metodo analogo a quello di Harsany [1967-68]) e non si suppone che la distribuzione di probabilità degli stati di natura sia nota.

L'informazione personale completa è una ipotesi di base che non viene mai abbandonata, tuttalpiù viene rinforzata. Le altre ipotesi sulle informazioni a priori dei giocatori sono invece fatte caso per caso, cioè fanno parte della descrizione del modello in oggetto. Per formulare tali ipotesi è allora più opportuno fare uso delle distribuzioni di probabilità subordinate. Siano $\{e\}$, $\{h\}$ due eventi e E, H gli insiemi corrispondenti, la probabilità che j assegna a $\{e\}$ subordinatamente all'ipotesi (h) è definita come il rapporto tra la probabilità della congiunzione dei due eventi e la probabilità di (h) (se quest'ultima è positiva), cioè:

$$(4.2) \quad \mu_j(E|H) := \mu_j(E \cap H)/\mu_j(H), \text{ se } \mu_j(H)>0$$

Ipotizzare che j consideri certo l'evento (h) equivale a supporre che j faccia uso di una misura di probabilità $\mu_j(.|H)$; l'unico problema sembra essere la condizione $\mu_j(H)>0$. Per eliminare tale problema conviene immaginare che inizialmente le uniche informazioni (conoscenze certe) in possesso di j siano quelle date dall'ipotesi di informazione personale completa, per cui j adotta una misura di probabilità μ_j che soddisfa la (4.1). In seguito vengono fornite a j nuove informazioni (h). Se (h) era precedentemente ritenuto impossibile da j (e conseguentemente $\mu_j(H)=0$) egli è costretto, per coerenza a cambiare teoria e quindi a sostituire la distribuzione "iniziale" μ_j con una μ_j' tale che, se H non è "piccolissimo", $\mu_j'(H)>0$. Se invece H è "piccolissimo" (perchè, ad esempio, la sua proiezione in un qualche spazio euclideo è puntiforme), comunque per ogni insieme "aperto" A tale che H è incluso in A sarà $\mu_j'(A)>0$, perchè secondo la nuova teoria di j (h) non è più impossibile (si tenga presente che è possibile definire per i sottoinsiemi di G una nozione di "apertura", cioè una topologia, coerente ed analoga a quella usuale negli spazi euclidei). $\mu_j(E|H)$ è dunque ottenibile come limite di una opportuna successione di rapporti del tipo $\mu_j'(E \cap A)/\mu_j'(A)$, purchè μ_j' sia relativa a una teoria secondo la quale (h) è un evento possibile.

Per snellire la notazione si userà la seguente convezione definitoria: siano y e y° componenti corrispondenti di Γ e Γ° rispettivamente, allora

$$(4.3) \quad \mu_j(.|y^\circ) := \mu_j(.|\{\Gamma \in G: y=y^\circ\}).$$

Dunque l'ipotesi che j conosca la componente y° del gioco "vero" (per il modello) Γ° sarà equivalente ad assumere che j usi la misura di probabilità $\mu_j(.|y^\circ)$. Ciò significa semplicemente che j subordina le sue valutazioni all'ipotesi che y° sia una componente del gioco parzialmente sconosciuto (e quindi soggettivamente aleatorio) a cui sta giocando. Per esempio se j conosce le funzioni di utilità di tutti i giocatori, egli fa uso della distribuzione $\mu_j(.|u^o)$.

Certezza sul comportamento altrui. Si è già visto che un evento (ovvero una classe di asserzioni equivalenti) può sempre essere messo in corrispondenza con un opportuno insieme. E' ovvio a questo punto far corrispondere a un evento sul comportamento altrui un insieme di (n-1)-uple di strategie s^j. Ma ciò solleva due difficoltà :

a) le strategie altrui sono definibili se si fissano alcune componenti del gioco che in generale non sono note a j, cioè la struttura dell'informazione H, le azioni possibili rispetto alle informazioni $h \epsilon H$ (cioè l'applicazione α) e i turni di gioco (cioè l'applicazione i);

b) per "comportamento altrui" si intende la scelta della strategia da parte di altri giocatori, dei quali sono state fissate quelle caratteristiche che fanno parte della descrizione del gioco, prima fra tutte la funzione di payoff.

Da quanto sopra consegue che un'ipotesi da parte di j sul comportamento degli altri giocatori può essere espressa come una applicazione che assegna a ogni possibile gioco Γ un insieme non vuoto di combinazioni (o (n-1)-uple) di strategie $B_j(\Gamma):=B_j^1(\Gamma)x...xB_j^{(j-1)}(\Gamma)xB_j^{(j+1)}(\Gamma)x...xB_j^n(\Gamma)$ incluso nel prodotto cartesiano degli spazi delle strategie S_i (i diverso da j) definiti da Γ. Ciò rappresenta un'ipotesi del tipo "se il gioco fosse Γ allora la combinazione di strategie dei miei compagni di gioco apparterrebbe all'insieme $B_j(\Gamma)$". Naturalmente le ipotesi di comportamento di j sono tante quante i suoi compagni di gioco e si usa un indice $k \epsilon I \backslash \{j\}$ per distinguere tra i vari $B_j^k(\Gamma)$. Poichè j è coerente, le sue ipotesi di comportamento devono prevedere comportamenti possibili in qualsiasi circostanza, quindi per ogni possibile Γ gli insiemi $B_{jk}(\Gamma)$ devono essere non vuoti; assegnando a Γ l'insieme $B_j(\Gamma)$ si ottiene una nuova applicazione gioco-insieme (corrispondenza), che rappresenta il prodotto logico delle varie ipotesi di comportamento. Formalmente una collezione di ipotesi di comportamento è una famiglia di corrispondenze

$$(4.4) \quad B_j^k:G \Rightarrow S[k],\ S[k]:=\cup_{\Gamma \epsilon G} S[k,\Gamma],\quad k \epsilon I \backslash \{j\}$$

ovvero di applicazioni

(4.4') $B_j^k : G \to 2^{S[k]}$, $k \in I \setminus \{j\}$

tali che

(4.5) per ogni Γ esiste $s^j \in B_j(\Gamma) := \times_{k \in I \setminus \{j\}} B_j^k(\Gamma)$,

dove $S[k,\Gamma]$ rappresenta lo spazio delle strategie s^k definite dal gioco Γ. Il diverso uso delle parentesi (quadre o tonde) è motivato dal fatto che $S[k,\Gamma]$ dipende solo dalle componenti più "strutturali" elencate sopra alla lettera a), mentre $B_j^k(\Gamma)$ in generale dipende da tutte le componenti di Γ. Per esempio j potrebbe conoscere tutto Γ^o ad eccezione delle funzioni di payoff degli altri giocatori, indicata con y tale informazione, la distribuzione rilevante sarebbe $\mu_j(.|y)$, per ogni Γ nel supporto di $\mu_j(.|y)$ si avrebbe $S[k,\Gamma]=S[k,\Gamma^o]$. Se j ipotizzasse che gli altri giocatori sono miopicamente razionali, $B_j^k(\Gamma)$ dipenderebbe in modo fondamentale da u e varierebbe al variare di Γ nel supporto di $\mu_j(.|y)$. Si noti che l'ignoranza sulla sola u è il caso paradigmatico di informazione incompleta considerato dalla letteratura a partire da Harsanyi [1967-68].

Incertezza sul gioco. A tutti gli eventi del tipo $(\Gamma)_j \in E$, sui quali è incerto, j assegna una probabilità data da $\mu_j(E) \in [0,1]$. Tuttavia G è uno spazio molto complesso (è un sottoinsieme di un prodotto cartesiano tra insiemi con la potenza del continuo e insiemi numerabili) e il suo insieme delle parti 2^G lo è ancora di più, perciò si assumerà che j assegni una misura di probabilità solo a una opportuna sottocollezione della collezione 2^G. In particolare si assume che j assegni una probabilità per ogni sottoinsieme "aperto" di G, cioè per ogni $B \in \tau(G)$, dove $\tau(G)$ è una collezione (detta topologia) analoga alla collezione degli usuali insiemi aperti in uno spazio euclideo (per W,Z e I fissati le proiezioni di B sul simplesso unitario in $R^{\#W}$ -lo spazio delle r - e su $R^{n(\#Z)}$ -lo spazio delle u - sono insiemi aperti, nel senso usuale, in tali spazi). Ad esempio un tipico insieme aperto $B \in \tau(G)$ è il seguente:

$$B=\{(T,\langle;I,i;A,\alpha,H\rangle\}\times(a_1,b_1)\times\ldots\times(a_l,b_l)\times\{r\in R^{\#W}: r_k\geq 0, \Sigma_{k=1}^{\#W} r_k=1,\ r_k\in(a_{n-k},b_{n+k})\}$$

dove gli (a_j,b_j) sono intervalli aperti in R ed $l=\#(Z)_n$. Inoltre si deve assumere che, se j assegna probabilità agli eventi di una collezione $\{e_i, i\in K\}$, la assegnerà anche a tutti gli eventi derivabili da essi applicando gli usuali connettivi logici (congiunzione, disgiunzuione, negazione ecc.). Queste considerazioni, pur non essendo sufficienti per giustificare matematicamente le formule che seguiranno, dovrebbero almeno permettere una comprensione intuitiva adeguata alla presente trattazione.

Formalmente l'incertezza di j sul gioco è rappresentata da un gioco soggettivamente aleatorio $(\Gamma)_j$ definito da uno spazio di misura $(G,\sigma a(G),\mu_j)$ tale che:

(4.6) $\sigma a(G)$ è la minima σ-algebra contenente una "opportuna" topologia $\tau(G)$ su G,

(4.7) μ_j è una misura di probabilità $\mu_j:\sigma a(G)\to[0,1]$, che soddisfa la (4.1).

Va osservato che tra gli eventi considerati da j ve ne sono alcuni che corrispondono a classi di asserzioni probabilistiche. Ciò è dovuto al fatto che la probabilità dei diversi stati di natura fa parte della descrizione del gioco ed è in tal modo "oggettivata". Tuttavia qui si accetta l'approccio soggettivo alla teoria delle probabilità, secondo il quale una proposizione probabilistica non è suscettibile di essere considerata vera o falsa, cioè non corrisponde di per se stessa a un evento. In altre parole attribuire a una proposizione probabilistica un valore di verità è un errore di categoria. Vale quindi un discorso analogo a quello fatto a proposito delle strategie miste (vedi paragrafo 3.3): si suppone che esista un "meccanismo aleatorio" o stato di cose oggettivo che produce gli stati di natura w e che a tale meccanismo aleatorio sia assegnabile in modo univoco un distribuzione di probabilità $r:W\to[0,1]$. Ciò significa che, noto tale "meccanismo aleatorio", ogni giocatore e ogni osservatore esterno (tipicamente il "teorico") assegna allo stato di natura w la stessa probabilità $r(w)$. Le $r(w)$ sono quindi "probabilità pubbliche" nel senso di De Finetti (De Finetti [1980]). Senza questa interpretazione l'inserimento di r nella descrizione del gioco sarebbe privo di significato. Ciò detto, l'evento $\{(\Gamma)_j \in \{\Gamma : r \in B\}\}$ corrisponde a una classe di asserzioni equivalenti su un meccanismo aleatorio, alle quali è possibile assegnare un valore di verità.

Incertezza sul comportamento altrui. Per qualche Γ l'insieme $B_j(\Gamma)$ può contenere più di un elemento e in tal caso è incerto sui diversi valori che s^j può assumere in $B_j(\Gamma)$. Egli assegna quindi una probabilità ai vari sottoinsiemi di $B_j(\Gamma)$. In questo caso il discorso probabilistico è molto semplificato. Dato Γ, le ipotesi comportamentali di j corrispondono a un isieme finito di punti o eventi elementari che j ritiene possibili, perciò j attribuirà in modo coerente una probabilità positiva ad ognuno di questi eventi. Indichiamo con $b_{j\Gamma}$ questa distribuzione di probabilità:

$$b_j^{\Gamma} : B_j(\Gamma) \to (0,1] , \quad \Sigma_{s \in B_j(\Gamma)} b_j^{\Gamma}(s) = 1 ;$$

la distribuzione dipende da Γ, se non altro perchè Γ definisce gli spazi delle strategie altrui e determina il contenuto concreto dell'ipotesi comportamentale B_j.

Poichè Γ è un gioco non cooperativo, si ipotizzerà che j, subordinatamente alla conoscenza di Γ, consideri le strategie altrui stocasicamente indipendenti. Si può obbiettare che comunque Γ può essere preceduto da una contrattazione e ciò implicherebbe una correlazione tra le strategie altrui. Ma ciò significa anzitutto che Γ non descrive elementi importanti della struttura dell'interazione e quindi andrebbe meglio specificato. Inoltre, se la contrattazione porta a un accordo in grado di autosostenersi, j adotterà una ipotesi comportamentale di tipo puntuale o deterministico e in questo caso il problema della indipendenza stocastica non si pone. Piuttosto il problema è un'altro. Una distribuzione di probabilità su $B_j^k(\Gamma)$ equivale a una strategie mista di k (quando il gioco è Γ). Perchè non ipotizzare allora che le ipotesi comportamentali prevedano l'uso di una certa strategia mista da parte degli altri giocatori? In fondo si è visto che alla scelta delle strategie miste va dato un significato "oggettivo", come la scelta della composizione di un urna. Ma il problema della probabilizzazione soggettiva si porrebbe comunque. Dal punto di vista di j possono esistere numerosi "meccanismi aleatori" tra cui k potrebbe scegliere e j sarebbe costretto ad assegnare su di essi una "metadistribuzione" di probabilità. Ancora una volta questa "metadistribuzione sarebbe equivalente a una strategia mista di k (una combinazione lineare convessa di strategie miste è ancora una strategia mista). Il fatto è che in certi casi j può considerare possibili due strategie di k, ma può considerare impossibile che k scelga a caso tra esse, ad esempio perchè le due strategie sono rispettivamente razionali rispetto a due ipotesi tra loro incompatibili. In questo caso l'ipotesi probabilistica di j corrisponde a una strategia mista di k, che j ritiene non potrà essere adottata. Imporre che le ipotesi di j corrispondano a una strategia mista di k ritenuta possibile da j, sembra essere arbitrario. Ma l'alternativa qui adottata non sembra essere molto nello spirito delle condizioni di equilibrio strategico, che impongono di rifiutare un'ipotesi probabilistica, quando questa non produce la distribuzione di frequenza "osservabile" alla fine del gioco. Si tratta di un problema legato all'interpretazione del concetto di probabilità e all'inferenza statistica, che in questa sede non è stato risolto. Certamente i risultati qui ottenuti sono molto più significativi nel caso di equilibri in strategie pure, o almeno di percorsi di equilibrio deterministici, cioè quando è sufficiente il ricorso alla logica del certo.

Formalmente l'incertezza sul comportamento altrui è rappresentata da una applicazione b_j che assegna a ogni gioco Γ in G una collezione di (n-1) distribuzioni di probabilità

$$(4.8)\quad b_{jk}^{\Gamma}:\overset{B_j^k(\Gamma)}{\cancel{S_k}}\to(0,1],\ \sum_{s_k\in S_k} b_{jk}^{\Gamma}(s_k)=1,\ b_j^{\Gamma}(s^j)=\Pi_{k\in I\setminus\{j\}}b_{jk}^{\Gamma}(s_k)$$

Nel caso in cui le strategie miste, che (secondo j) k potrebbe adottare, cosituiscono un insieme convesso, $B_j^k(\Gamma)$ e b_{jk}^{Γ} possono essere interpretate come un tenativo di indovinare la strategia mista adottata da k.

Ricapitolando, è possibile definire la teoria di un giocatore j come segue:

Definizione 4.1. La teoria di j è una struttura

$\theta_j := \langle (\Gamma)_j ; B_j{}^k, k \in I \setminus \{j\}; b_j \rangle$ tale che:

-$(\Gamma)_j$ è un gioco soggettivamente aleatorio definito da uno spazio di misura $(G, \sigma a(G), \mu_j)$, per il quale valgono le (4.1), (4.6), (4.7);

-$B_j{}^k$ è una famiglia di corrispondenze definite dalle (4.4) e (4.5);

-b_j è una applicazione $b_j : G \to \{b_j{}^r : \ldots\}$, dove $\{b_j{}^r : \ldots\}$ è l'insieme delle $b_j{}^r$ che soddisfano la (4.8).

A questo punto si può intuire come j derivi una congettura da una teoria. Sia $U(p)$ un intorno di un punto p dell'intervallo $[0,1]$ e si consideri $w \in W^o$; grazie alla sua teoria j può calcolare la probabilità (soggettiva) che la probabilità "oggettiva" $r(w)$ appertenga a $U(p)$, tale probabilità è uguale a $Pr\{U(p)\} := \mu_j(\{\Gamma \in G : r(w) \in U(p)\})$. Considerando partizioni sempre più fini di $[0,1]$ in intorni $U(p_i)$ sempre più piccoli, j può ottenere $r_j(w)$ come limite delle medie ponderate $\Sigma_i Pr(U(p_i))$. Formalmente si ha

$$(4.9) \qquad r_j = \int_G r(w) d\mu_j, \quad w \in W^o$$

Per quanto riguarda le probabilità condizionate $c(t|x)$ che costituiscono la congettura il discorso è un po' più complesso. Si indichi con $Pr\{z|\sigma_j;\theta_j\}$ la probabilità che j assegna all'evento z in base alla teoria θ_j e subordinatamente alla scelta della strategia σ_j. La probabilità di raggiungere un nodo x è data da $Pr\{Z(x)|\sigma_j,\theta_j\}$. Per il calcolo delle probabilità subordinate supponiamo che σ_j sia tale da rendere possibile il nodo-evento subordinante, altrimenti per j non ha senso definire la probabilità subordinata. Verificata questa condizione le probabilità subordinate di archi su cui non è definita una azione di j risultano indipendenti dalla sua strategia. Si supporrà perciò, senza perdita di generalità che σ_j sia una strategia positiva o completamente mista: $\sigma_j \in \Sigma_j{}^o$. La congettura di j è allora derivata nel modo seguente:

$$c(t|x) = \frac{Pr\{Z(t)|\sigma_j;\theta_j\}}{Pr\{Z(x)|\sigma_j;\theta_j\}}, \quad Pr\{Z(x)|\sigma_j;\theta_j\} > 0, \ x \in X^j, \ t \in S(x)$$

4.10)

$$Pr\{Z(x')|\sigma_j,\theta_j\}=\Sigma_{x\in Z(x')}Pr\{z|\sigma_j,\theta_j\}$$

$$Pr\{z|\sigma_j;\theta_j\}=\prod_{x\in(X_j)z}\sigma_j[\alpha(s(x,z))]\int_G[r(p_{1(x)}(z))\sum_{s^j\in B_j[z;\Gamma]}b_j^{\Gamma}(s^j)]d\mu_j$$

$$B_j[z;\Gamma]:=\{s^j\in B^j(\Gamma):(\text{esiste } s_j\text{: } f(p_{1(x)}(z),s_j,s^j)=z\}$$

Le formule (4.10) sono piuttosto macchinose e meritano una spiegazione: j dapprima calcola la probabilità di z subordinatamente all'ipotesi che il gioco sia Γ. Tale probabilità è data dal prodotto di tre fattori principali:

(a) il prodotto delle probabilità condizionate che la strategia comportamentale σ_j assegna a quegli archi che portano in z e a cui corrisponde una azione di j; tale prodotto non varia al variare di Γ perchè le componenti di Γ da cui dipende sono fissate, ovvero note a j con certezza, per questo motivo compaiono fuori del segno d'integrale;

(b) la probabilità dello stato di natura in cui z è possibile, cioè di quell'unico $w=p_{1(x)}(z)$ che precede z;

(c) la somma delle probabilità di quelle (n-1)-uple di strategie (pure) altrui, che secondo j sono possibili, dato Γ, e per le quali è possibile ottenere z; tali combinazioni di strategie formano l'insieme $B_j[z;\Gamma]$.

Una volta calcolate le probabilità subordinate a Γ, j procede calcolandone una "media" ponderata con la misura di probabilità μ_j, cioè integra su G rispetto a μ_j. I valori della congettura che rappresentano probabilità subordinate ad eventi teoricamente impossibili, non possono essere calcolati in questo modo, ma sono del tutto irrilevanti nel determinare il comportamento di j; imporre delle condizioni anche su questi valori sarà perciò un'operazione innocua, ma a volte matematicamente comoda.

Per ogni informazione sul gioco y^o assegnata a j la congettura di j, $\varsigma_j:=(r_j,c_j)$ si ottiene integrando sullo spazio $G|y^o:=\{\Gamma\in G:y=y^o\}$ rispetto alla misura $\mu_j(.|y^o)$.

Le informazioni sul comportamento degli altri giocatori possono direttamente essere assegnate tramite una o più ipotesi comportamentali B_j che rappresentano dei vincoli di razionalità sul comportamento di i, per i diverso da j. Ad esempio j può assumere, correttamente, che gli altri giocatori siano miopicamente razionali. Ciò si esprime con

$B_j(\Gamma)=\{s^j\epsilon S[j,\Gamma]$:(per ogni $i\epsilon I\setminus\{j\}$ esiste $\varsigma_i\epsilon Ç_i:E(u_i|\varsigma_i,s_i)\geq$
$\geq E(u_i|\varsigma_i,s_i'), s_i'\epsilon S_i)\}$

Dalle (4.9) e 4.10) si possono dedurre le proprietà che una congettura deve soddifare quando a j sia assegnata una certa informazione y° sul gioco o sugli altri giocatori. Tali congetture saranno di volta in volta definite come le congetture compatibili con y°.

Quanto questi vincoli di compatibilità siano stringenti dipende dal gioco in questione. Per comprenderlo sono sufficienti i due esempi seguenti.

Esempio 4.1.Nel paragrafo 4.3 si mostrerà che, se sono soddisfatte alcune ipotesi non particolarmente implausibili, per ogni giocatore j lo spazio delle congetture compatibili con la struttura dell'informazione corrisponde a quello delle strategie altrui, cioè a Σ^j; in particolare ciò è sempre vero per i giochi a due persone con un solo stato di natura e in questo caso i due spazi (quello delle congetture di j e quello delle strategie di k) sono completamente isomorfi. Chiamiamo $Ç_j|(H,\alpha)^o$ tale spazio di congetture. $Ç_j|(H,\alpha)^o$ è incluso in $Ç_j$,ma non sempre l'inclusione è stretta, cioè non sempre $Ç_j|(H,\alpha)^o$ è realmente un sottospazio di $Ç_j$: se Γ^o è un gioco a informazione perfetta $Ç_j|(H,\alpha)^o=Ç_j$. Si è visto infatti nel paragrafo 3.2 che una congettra ς_j può non corrispodere a una combinazione di strategie altrui, perchè j può assegnare pro-babilità diverse a due coppie di nodi $(t,p_1(t))$ e $(t',p_1(t'))$ tali che $p_1(t')\epsilon H(p_1(t))$, mentre il giocatore $k=i(p_1(t))=i(p_1(t'))$, non potendo distinguere tra i due nodi decisionali, è "costretto" a dare a tali coppie la stessa probabilità, cioè necessariamente $\sigma_k(t)=\sigma_k(t')$ (si veda la figura 1). Ma questa eventualità non può verificarsi se il gioco è a informazione perfetta, perchè ogni insieme d'informazione contiene un unico nodo: per ogni x $H(x)=\{x\}$. Si pensi in particolare al gioco della figura 4 (minaccia); per entrambi i giocatori lo spazio delle congetture coincide con lo spazio delle strategie dell'altro: $Ç_j=\Sigma_j=\{(x,y)\epsilon R_+^2:x+y=1\}$ isomorfo a [0,1]. Inoltre per questo gioco nemmeno l'ipotesi che il giocatore 1 sia miopicamente razionale pone dei vincoli operanti sulle congetture di 2, infatti per ogni strategia

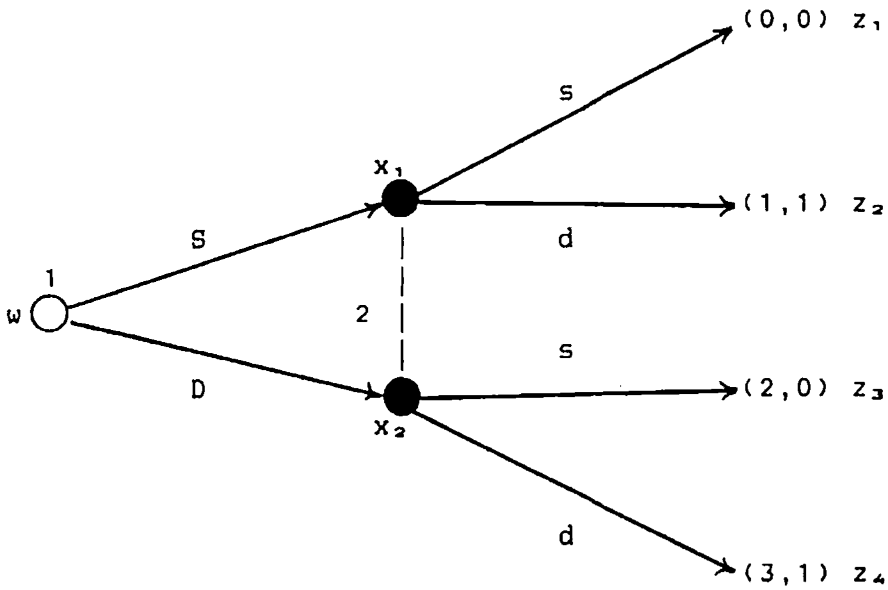
σ_1 esiste una congettura c_1 rispetto alla quale σ_1 è miopicamente razionale; ciò è chiaramente mostrato dallo studio di tale gioco e in particolare dalla figura 5, dalla quale appare evidente che $U_{p\epsilon[0,1]}\Sigma_1^*(p)=\Sigma_1$ (le stesse considerazioni valgono per 1 nei confronti di 2, ma forse per chiarirlo sarebbero necessarie delle precisazioni che distoglierebbero dal punto in questione).

Esempio 4.2. Sia Γ^o il gioco rappresentato nella figura 11. Anzitutto è facile capire che $Ç_1|(H,\alpha)^o$ è incluso in senso stretto in $Ç_1$, infatti l'informazione di 2 è imperfetta e valgono le considerazioni esposte nel paragrafo 3.2 relativamente alla figura 1. In particolare $Ç_1|(H,\alpha)^o$ è isomorfo a $[0,1]$ e $Ç_1$ è isomorfo a $[0,1]x[0,1]$. Inoltre l'ipotesi che l'altro giocatore sia miopicamente razionale pone un vincolo fortissimo (se è nota u^o). Infatti per 1 la strategia D da un'utilità strettamente maggiore di quella data dalla strategia S, per ogni congettura in $Ç_1$ e lo stesso vale per 2 e la strategia d (matematicamente: $E(u_1|c_1,S)\epsilon[0,1]$, $E(u_1|c_1,D)\epsilon[2,3]$ per ogni c_1, $E(u_2|c_2,s)=0$, $E(u_2|c_2,d)=1$ per ogni c_2). Dunque l'insieme $B_j(\Gamma^o)=U_{c\epsilon C}S_k^*(c_k)$ contiene un'unica strategia (per j =1,2). In questo caso la conoscenza della funzione di payoff dell'avversario e del postulato di razionalità miope permettono ai giocatori di determinare univocamente le strategie altrui.

4.2.Equivalenza empirica e strategica degli equilibri e robustezza rispetto alle congetture.

Nel paragrafo 3.5 l'equilibrio congetturale è stato definito come una <u>coppia</u> $(ç,\sigma)$ tale che la strategia di ogni agente j è miopicamente razionale rispetto a $ç_j$ e $ç_j$ non è rifiutabile in base all'evidenza prodotta dalla combinazione di strategie σ. In seguito sono state messe in evidenza alcune differenze sostanziali rispetto al concetto di equilibrio Nash (e quindi anche rispetto a tutti i suoi sottocasi o "refinement"), mostrando come questo possa considerarsi un caso particolare di equilibrio congetturale. Tuttavia, essendo l'esposizione in gran parte discorsiva e esemplificativa, non si è affrontata una differenza puramente

Gioco con esito strettamente determinato.



Γ^o

Per 1 e 2 esiste un'unica strategia miopicamente razionale, indipendentemente dalla congettura adottata. Quindi

$$B_2^r(\Gamma^o)=\{[(D,1),(S,0)]\}$$

$$B_1^r(\Gamma^o)=\{[(d,1),(s,0)]\}$$

figura 11

formale: un equilibrio Nash è costituito soltanto da una combinazione di strategie σ e non da una coppia di di combinazioni di strategie e congetture (ς,σ). In altre parole i due tipi di equilibrio sono definiti come punti di spazi diversi: un punto di Σ nel caso Nash e un punto di $\text{Ç}\times\Sigma$ nel caso congetturale. Per affrontare in modo più rigoroso e sistematico il discorso sui rapporti tra i diversi tipi di equilibrio bisogna mettere a punto una opportuna "traduzione" che consenta esprimere i vari concetti nello stesso linguaggio matematico.

La soluzione più semplice sembra essere quella di riportare tutto al solo spazio Σ, mediante una piccola modifica della definizione di equilibrio congetturale:

> "una combinazione di strategie σ è un equilibrio congetturale se esiste una costellazione di congetture ς tale che ...".

Questo è il metodo seguito dalla letteratura corrente in casi analoghi. Ad esempio uno dei "refinement" dell'equilibrio Nash, l'equilibrio "sequenziale", nella sua versione originale (Kreps e Wilson [1982]) è definito da una coppia (μ,σ) con certe proprietà, dove μ è un ente collegabile alle congetture degli agenti e al loro apprendimento (vedi paragrafo 4.7). Questo approccio costituiva in effetti un notevole avvicinamento rispetto a quello proposto in questa sede. In seguito la letteratura ha riportato il concetto nel solo spazio Σ mediante una ridefinizione analoga a quella data sopra (si veda Van Damme [1983],p 122:commento alla def.6.3.1).

Questo tipo di traduzione è formalmente legittimo, ma inopportuno perchè mette in ombra questioni rilevanti. Due equilibri congetturali (ς',σ) e (ς'',σ) vengono tradotti in un unico equilibrio σ, cioè risultano indistinguibili, completamente equivalenti e ciò porta a trascurare quanto segue.

a) Le differenze tra ς' e ς'' possono essere importanti; per esempio si è soliti interpretare un equilibrio Nash σ^* come il risultato di una consultazione e/o contrattazione tra i giocatori, che porta un generico j ad aspettarsi σ^{j*} e, poichè non esistono incentivi a deviare dalla strategia dichiarata σ_j^* (che è una "best reply"), σ^* si autosostiene; ma è chiaro che solo uno tra i possibili equilibri (ς,σ^*) ammette questa interpretazione: si tratta di quello per il quale $ç$ "corrisponde" a σ^*.

b) Si indichi con $Ç(\sigma)$ l'insieme delle congetture che sostengono un equilibrio σ; può accadere che la teoria (le ipotesi del modello) non permetta di "privilegiare" certe congetture rispetto ad altre, cioè che si debbano ritenere tutte le combinazioni $ç$ in $Ç^o$ ($Ç^o$ incluso in $Ç$) egualmente possibili; in tal caso, se σ' e σ'' sono due equilibri ha senso confrontarli "misurando" gli insiemi $Ç(\sigma')$ e $Ç(\sigma'')$, o meglio le loro intersezioni con $Ç^o$.

Queste considerazioni inducono a ritenere che sia migliore una traduzione in base alla quale ogni equilibrio viene definito come un punto in $Ç \times \Sigma$; il tipo di equilibrio risulterà caratterizzato dalle proprietà delle congetture. E' poi possibile definire delle classi di equilibri equivalenti, nel senso che producono gli stessi risultati. Tali risultati possono riguardare le strategie adottate oppure la frequenza con cui si presentano certi esiti del gioco.

Definizione 4.2. Due equilibri congetturali $(ç',\sigma')$ e $(ç'',\sigma'')$ si dicono strategicamente equivalenti se $\sigma'=\sigma''$. Due combinazioni di congetture si dicono strategicamente equivalenti se sono le componenti di due equilibri strategicamente equivalenti e l'insieme delle $ç$ strategicamente equivalenti per una σ assegnata si indica con $Ç(\sigma)$.

Definizione 4.3. Due equilibri congetturali $(ç',\sigma')$ e $(ç'',\sigma'')$ si dicono empiricamente equivalenti se $Pr(z|\sigma')=Pr(z|\sigma'')$ per ogni $z \in Z$. Sia $p:Z \to [0,1]$ una distribuzione di probabilità su Z; due congetture si dicono empiricamente equivalenti rispetto a p se sono le componenti di due equilibri empiricamente equivalenti che producono p; la classe delle congetture empiricamente equivalenti rispetto a p si indica con $Ç(p)$.

Quest'ultima definizione richiede un breve commento. L'avverbio "empiricamente" è usato perchè in generale un ipotetico osservatore esterno o "arbitro del gioco" può osservare soltanto le sequenze di azioni che effettivamente si realizzano e tali sequenze sono in corrispondenza biunivoca con gli esiti finali z del gioco. Osservando la frequenza di lungo periodo con cui tali esiti si realizzano si può al più risalire alla loro probabilità, non alle strategie che la determinano, a meno che la funzione degli esiti finali $f: W \times S \to Z$ non sia biunivoca (vedi paragrafo 3.7). Da ciò consegue che nei giochi a rivelazione completa i due concetti di equivalenza coincidono e questo è pienamente coerente col fatto che per tali giochi è lecita la rappresentazione in forma normale, che permette di giudicare i risultati soltanto sulla base delle strategie.

Lo studio del gioco di minaccia (paragrafo 3.7, figure 4,5 e 6) fornisce una buona esemplificazione dei concetti esposti.

Data una qualsiasi σ, per la quale 1 cede alla minaccia ($\sigma_1(L)=1$), risulta $Ç(\sigma)=(C \cup E)$ (vedi figura 6). Ciò dimostra, tra l'altro che due congetture possono essere strategicamente equivalenti rispetto a più di una strategia. Esiste invece un'unica σ^* di equilibrio, per la quale 1 resiste alla minaccia: è quella in cui la minaccia si rivela un "bluff" (σ: $\sigma_1(R)=1$, $\sigma_2(r)=1$); a tale σ^* corrisponde un'unica coppia $ç^*$: quella per cui 1 non crede alla minaccia e 2 crede che 1 non cederà ($p=0$, $q=1$; si continua a fare riferimento a equilibri strategici con criterio di rifiuto forte).

Le possibili distribuzioni di equilibrio su $\{z_1, z_2, z_3\}$ sono $p_1:=(1,0,0)$ e $p_3:=(0,0,1)$ e si ha $Ç(p_1)=(C \cup E)$, $Ç(p_3)=\{ç^*\}$.

Supponiamo di non avere nessuna ragione a priori per ritenere che certe $ç$ siano più plausibili di altre, dovremo allora valutare quali risultati sono più "robusti" rispetto alle congetture. Un modo per farlo è quello di di confrontare le classi di congetture equivalenti rispetto a diversi risultati mediante la loro misura. Per esempio l'insieme ($C \cup E$) è un segmento in R^2 di lunghezza 2/3, mentre l'insieme $\{ç^*\}$ contiene un solo punto, quindi il risultato p_1 è più robusto del risultato p_2. Poichè lo spazio delle combinazioni di congetture è sempre assimilabile a un sottoinsieme (convesso e compatto) di uno spazio euclideo, la nozione di misura è quella usuale, cioè la misura di Lebesgue. Sia E un sottoinsieme di $Ç$ e $Ç$ un sottoinsieme di R^k ($k:=\Sigma_{j \in I}(\#[S(X^j)]-\#(X^j))$), si indicherà con $l(E)$ la misura di Lebesgue in R^k.

Definizione 4.4. Sia $Ç^0$ l'insieme delle combinazioni di congetture ritenute possibili, si dice che il risultato r è più robusto rispetto alle congetture di r' se esiste

$$(4.11) \quad \lim_{\delta \to 0} l[U_\delta(Ç(r) \cap Ç^0)]/l[U_\delta(Ç(r') \cap Ç^0] > 1$$

(per $U_\delta(A)$ si intende l'intorno di raggio δ dell'insieme A, ovvero l'insieme dei punti la cui distanza minima da A è minore di δ)

Il motivo per cui si fa riferimento al limite di un rapporto è che le misure degli insiemi in questione potrebbero essere nulle in R^k perchè tali insiemi hanno una dimensione inferiore a k. Nel precedente esempio gli insiemi $Ç(p_1)$ e $Ç(p_2)$ avevano entrambi misura nulla in R^2, ma $Ç(p_1)$ aveva una misura unidimensionale positiva (cioè 2/3); ponendo $r=p_1$ e $r'=p_2$, il limite della (4.11) risulta essere ∞,cioè più di 1.

Ovviamente il risultato cui si fa riferimento nella definizione può essere sia una combinazione di strategie, sia una distribuzione di probabilità su Z.

4.3.Equilibri congetturali Nash e teoremi di esistenza

Ci si propone ora di ridefinire l'equilibrio Nash secondo il tipo di traduzione delineato nel precedente paragrafo e tenendo conto della ossevazione ivi esposta al punto a). Ma è opportuno premettere la definizione usuale:

Definizione 4.5. Una combinazione di strategie σ è detta equilibrio Nash per il gioco Γ se è tale che

$$(4.12) \quad E(u_j|\sigma) \geq E(u_j|\sigma_j', \sigma^j), \quad \sigma_j' \in \Sigma_j, \quad j \in I$$

Un altro modo di esprimere il concetto è che σ è tale che per ogni j σ_j è la migliore risposta ("best reply") a σ^j.

Ad ogni equilibrio Nash σ corrisponde un insieme $Ç(\sigma)$ di congetture ç tali che (ç,σ) è un equilibrio congetturale. Si mostrerà che $Ç(\sigma)$ non è vuoto, perchè si può costruire una combinazione di congetture $ç$ "corrispondente" a σ, per la quale $(ç,\sigma)$ è un equilibrio congetturale.

Definizione 4.6. Una congettura $ç_j$ tale che $r_j=r^o$ si dice corrispondente a σ^j se

(4.13) $c_j(t|x)=\sigma_{i(x)}[\alpha(t)]$, $x:=p_1(\cdot t)\epsilon X^j$

Si dice che $ç$ corrisponde a σ se per ogni $j\epsilon I$ $ç_j$ corrisponde a σ^j

La condizione per cui $r^o=r_j$ non sarebbe strettamente necessaria, ma permette di evitare alcune complicazioni quasi esclusivamente formali e inoltre è sempre data per scontata nella letteratura.

Il significato della (4.13) è che la probabilità soggettiva subordinata a x, che j assegna a t è uguale a quella definita dalla strategia del giocatore che sceglie in x. Ciò può interpretarsi nel senso che j conosce σ^j, ma si vedrà che sono possibili altre interpretazioni. E' chiaro comunque che, per r e σ assegnate, $ç$ risulta univocamente determinata dalla (4.13).

Lemma 4.1. Se $ç$ corrisponde a σ, allora $(ç,\sigma)$ è un equilibrio congetturale) se e solo se σ è un equilibrio Nash.

Dimostrazione. Dalla (4.13) si ottiene

$Pr\{z|ç_j,\sigma_j\}=Pr\{z|\sigma\}$, $z\epsilon Z$, $j\epsilon I$;

Ciò implica

$E(u_j|ç_j,\sigma_j)=E(u_j|\sigma)$, $j\epsilon I$ e $\Pi_{i\epsilon I}Cr_i^{*}(ç_i,\sigma_i,Pr\{.|\sigma\})=1$

cioè i payoff attesi soggettivi coincidono con quelli "oggettivi" e nessun giocatore rifiuta la sua congettura. Per la coincidenza tra payoff la (4.12) equivale a

$E(u_j|ç_j,\sigma_j)\geq E(u_j|ç_j,\sigma_j')$, $\sigma_j'\epsilon\Sigma_j$, $j\epsilon I$ ovvero $\sigma\epsilon\Sigma^*(ç)$

e quindi $(ç,\sigma)$ è un equilibrio congetturale se e solo se σ è un equilibrio Nash. ■

D'altra parte è evidente che $Ç(\sigma)$ può contenere più di un elemento (vedi gioco di minaccia, figura 6), si dovranno allora considerare equilibri "congetturali Nash" tutti gli elementi di $Ç(\sigma)x\{\sigma\}$? No! La (4.12) ha senso come condizione di equilibrio soltanto se si ipotizza che ogni j si aspetti σ^j; tale aspettativa può essere interpretata anche, ma non solo, come risultato di un processo di consultazione/contrattazione. Risulta quindi giustificata la seguente definizione.

Definizione 4.7. Una coppia $(ç,\sigma)$ è detta equilibrio congetturale Nash se ç corrisponde a σ e σ è un equilibrio Nash. Un equilibrio congetturale $(ç,\sigma)$ è detto non Nash se ç non corrisponde a σ.

La definizione 4.7 ha significato in virtù del lemma 4.1 e precisa in che senso il concetto di equilibrio Nash è un caso particolare di equilibrio congetturale. Non è quindi sorprendente che si possa sfruttare il teorema di Nash per dimostrare l'esistenza di un equilibrio congetturale.

Teorema 4.1. Ogni gioco finito in forma estesa Γ possiede almeno un equilibrio congetturale, che è inoltre un equilibrio congetturale Nash.

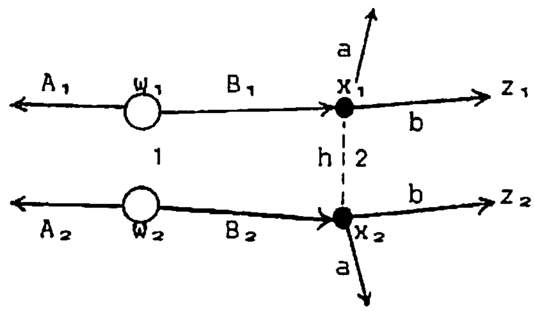
Dimostrazione. Si è visto nel paragrafo 3.3 che l'ipotesi di memoria perfetta rende equivalenti i due concetti di strategia mista e strategia comportamentale. Per ogni strategia comportamentale σ_j indichiamo con $\sigma_j{}^N$ la corrispondente strategia mista. La rappresentazione standard di Γ in forma normale, indipendentemente dalla sua significatività, è sempre formalmente possibile; si indicherà quindi con Γ^N il gioco in forma normale derivato da Γ. Poichè Γ^N è un gioco finito in forma normale, il teorema di Nash garantisce l'esistenza di una n-upla di equilibrio σ^N (per una dimostrazione semplice si può vedere ad esempio Vorob'ev [1977], p 93). Poichè σ equivale a σ^N, σ è un equilibrio Nash per Γ. Sia ç la combinazione di congetture corrispondente a σ, in virtù del lemma 4.1 e della definizione 4.7 (ς,σ) è un equilibrio congetturale Nash per Γ. ■

L'interpretazione normalmente data all'equilibrio Nash implica che sia possibile per i giocatori comunicare tra loro prima del gioco. Se si esclude tale possibilità bisogna allora considerare l'equilibrio come una "soluzione" del gioco (vedi paragrafo 2.4), che dei giocatori completamente informati possono calcolare per ottenere le strategie "ottimali". Ma questa interpretazione oltre alla completa informazione presuppone l'unicità dell'equilibrio o almeno la scambiabilità degli equilibri (due equilibri $(\sigma)^1$ e $(\sigma)^2$ sono scambiabili se per ogni j $\sigma_j{}^k$ è una best reply di $(\sigma^j)^i$, i,k=1,2) ed infatti ha origine nel lavoro di von Neumann e Morgenstern (cfr. von Neumann, Morgenstern [1980], p 148), nel quale l'ipotesi che il gioco sia a due persone e somma costante garantisce il soddisfacimento di tale presupposto. In quanto segue si mostrerà invece che l'equilibrio Nash è un concetto pienamente significativo per giochi legittimamente rappresentabili in forma normale quando i giocatori conoscono la struttura dell'informazione.

Sia Γ^o il gioco in oggetto; se j conosce la struttura dell'informazione, egli usa la distribuzione $\mu_j(.|(H,\alpha)^o)$. L'inserimento di α^o non deve sorprendere: α^o serve solo a "etichettare" opportunamente i nodi in $T^o \backslash W^o := (W^o_\cdot)^c$, l'unica cosa che realmente conta è che soltanto se $p_1(t)$ e $p_1(t')$ appartengono allo stesso insieme di informazione può aversi $\alpha(t)=\alpha(t')$. Per poter dedurre delle proprietà interessanti dalla conoscenza della struttura dell'informazione è necessario fare delle ipotesi sulla parte probabilistica delle teorie dei giocatori. Il problema è che nelle formule (4.10) compare un rapporto tra integrali. L'integrale a denominatore contiene dei fattori che sono tutti presenti anche nell'integrale a numeratore (si ricordi che le strategie miste in forma normale contenute in quelle espressioni possono essere trasformate in strategie miste comportamentali del tutto equivalenti e con ciò le sommatorie vengono trasformate in prodotti), ma non è possibile fare delle semplificazioni se non sono soddisfatte delle opportune ipotesi d'indipendenza stocastica. Questo problema non è puramente matematico. Il

Ipotesi d'indipendenza e derivazione della condizione di compatibilità con la struttura dell'informazione.

Si ipotizza che $B_1{}^2(\Gamma)$ e $b_{12}{}^{r}$ siano costanti rispetto a r e che $(r)_1$ e il resto del gioco $(\Gamma_{-r})_1$ siano considerati da 1 elementi aleatori indipendenti



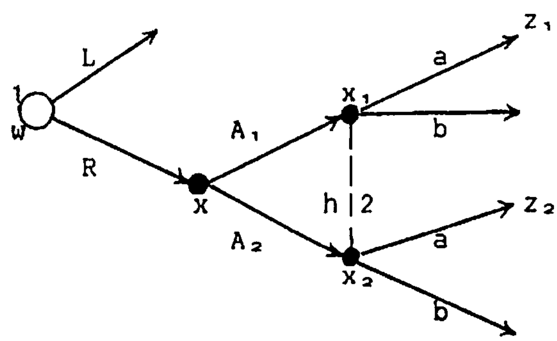
$$Pr[z_j|(B_1,B_2);\theta_1]=\int_G r(w_j)b_{12}{}^{r}(b)d\mu_1 = \int_{[0,1]^2} r(w_j)d\mu_1{}^{r}\int_{G_{-r}} b_{12}{}^{r}(b)d\mu_1{}^{-r},$$

$$Pr[Z(x_j|(B_1,B_2);\theta_1] = \int_{[0,1]^2} r(w_j)d\mu_1{}^{r},\quad j=1,2$$

quindi

$$c_1(z_1|x_1) = \frac{Pr[z_1|(B_1,B_2);\theta_1]}{Pr[Z(x_1)|(B_1,B_2);\theta_1]} = \frac{Pr[z_2|(B_1,B_2);\theta_1]}{Pr[Z(x_2)|(B_1,B_2);\theta_1]} = c_1(z_2|x_2)$$

Noto $(H,\alpha)=(H,\alpha)^{o}$ $(\mu_1=\mu_1(.|(H,\alpha)^{o})$; $B1_k(\Gamma)$ e $b_{1k}{}^{r}$ sono costanti rispetto a u_j (j diverso da k, j,k=2,3) $(u_2)_1$ e $(u_3)_1$ sono elementi aleatori indipendenti.



$$Pr[z_j|R;\theta_j]=\int_G b_{12}{}^{r}(A_j)b_{13}{}^{r}(a)d\mu_1= \int_{R^5} b_{12}{}^{r}(A_j)d\mu_j{}^{u2}\int_{R^6} b_{13}{}^{r}(a)d\mu_1{}^{u3}\quad j=1,2$$

$$Pr[Z(x_j)|R,\theta_1]= \int_{R^5} b_{12}{}^{r}(A_j)d\mu_1 u_2$$

quindi $$c_1(z_1|x_1)= \frac{Pr[z_1|R;\theta_1]}{Pr[Z(x_1)|R;\theta_1]} = \frac{Pr[z_2|R;\theta_1]}{Pr[Z(x_2)|R;\theta_1]} = c_1(z_2|x_2)$$

Si noti che in entrambi gli esempi è violata una di queste due ipotesi: (a) ci sono solo due giocatori, (b) esiste un solo stato di natura. Se valgono contemporaneamente (a) e (b) le ipotesi di indipendenza sono banalmente verificate e non è necessario menzionarle per poter dedurre che $\alpha(t)=\alpha(t')$ implica $c_j(t|p_1(t))=c_j(t'|p_1(t'))$

figura 11 bis

raggiungimento di un certo nodo è un evento che non informa soltanto sullo svolgimento del gioco. Quando il gioco è incerto, il raggiungimento di un certo nodo fornisce delle informazioni sul gioco stesso e poichè il contenuto concreto delle ipotesi comportamentali dipende dal gioco, l'evento in questione può fornire informazioni anche sul futuro comportamento dei giocatori. Perciò, anche se j è a conoscenza del fatto che due archi $x \to t$ e $x' \to t'$ corrispondono alla stessa azione di k, non necessariamente j attribuirà a quei due archi la stessa probabilità condizionata, cioè non necessariamente $c_j(t|x)=c_j(t'|x')$. Le ipotesi che seguono giustificano proprio questa implicazione, permettono cioè di dedurre che, se $\alpha(t)=\alpha(t')$, allora $c_j(t|p_1(t))=c_j(t'|p_1(t'))$. Queste ipotesi potranno essere giudicate piuttosto ad hoc, ma poichè sono banalmente verificate per una classe interessante di giochi (i giochi a due persone con un solo stato di natura o, equivalentemente, con stati di natura noti a entrambi i giocatori) e in generale sembrano tanto plausibili quanto le alternative, è comunque significativo esplorarne le implicazioni.

Ipotesi di indipendenza dalla distribuzione degli stati di natura. Se la vera distribuzione degli stati di natura r° non gli è nota, ogni agente j considera le ipotesi comportamentali $B_j(\Gamma)$ e $b_j{}^r$ indipendenti dalla distribuzione r e considera la distribuzione aleatoria $(r)_j$ stocasticamente indipendente dalle altre componenti il gioco aleatorio $(\Gamma)_j$. Si noti che ciò non significa che j considera il comportamento di un altro giocatore k indipendente dalla conoscenza che k ha di r. In molti casi ciò implicherebbe un comportamento irrazionale di k. L'ipotesi sostanzialmente significa che secondo j anche gli altri agenti sono ignoranti su r; quindi, quando egli subordina un certo evento, costituito da una azione di k, all'ipotesi che la distribuzione sia r, non per questo deve pensare che k faccia la sua scelta avvantaggiandosi della conoscenza di r e che se "ceteris paribus" r fosse diversa, la scelta di k potrebbe essere diversa. Formalmente si ha: $B_j(\Gamma)$ e $b_j{}^r$ sono costanti al variare di r, $(r)_j$ e $(A,\alpha,H,u)_j$ sono elementi aleatori stocasticamente indipendenti.

Ipotesi di indipendenza tra le variabili da cui dipendono le strategie altrui. Se il vero gioco Γ^o non gli è noto, ogni j ritiene che, subordinatamente alla conoscenza di $(A,\alpha,H)=(A,\alpha,H)^o$, le strategie altrui dipendano da elementi aleatori tra loro indipendenti. Dati $(A,\alpha,H)^o$ e tenendo conto dell'ipotesi precedente, le uniche variabili da cui possono dipendere le strategie altrui in base alle ipotesi comportamentali di j sono le funzioni di utilità u. In sostanza si assume che secondo j, nota la struttura dell'informazione (A,α,H), l'insieme delle strategie di k possibili dipende soltanto dalla variabile (soggettivamente) aleatoria $(u_k)_j$ e le diverse (u_k) sono tra loro stocasticamente indipendenti. Si noti la differenza rispetto all'ipotesi che le strategie sono indipendenti, date le regole del gioco. Vale inoltre una osservazione analoga a quella fatta per la precedente ipotesi. La dipendenza di $B_j{}^k(\Gamma)$ dalla sola u_k non implica che secondo j la conoscenza che k ha delle altrui funzioni di utilità sia irrilevante nel determinare il comportamento di k, semplicemente j sa che k conosce u_k e non ritiene che k conosca le altre u_i. Questa ipotesi e quella precedente possono essere così intepretate: ogni giocatore j considera simmetrica la distribuzione delle informazioni sulle regole del gioco e inoltre considera tra loro indipendenti gli elementi aleatori "continui" che definiscono il gioco aleatorio $(\Gamma)_j$ (si ricorda che questi elementi sono aleatori per j, che non li conosce, ma sono "oggettivamente certi" dal punto di vista di un osservatore esterno che conosce la struttura dell'interazione).

Un'occhiata alla figura 11 bis darà un'idea di come queste ipotesi permettono di giustificare la seguente definizione.

Definizione 4.8. Una congettura $ç_j$ è compatibile con la struttura dell'informazione $(H,\alpha)^o$ se $\alpha^o(t)=\alpha^o(t')$ implica $c_j(t|p_1(t))=c_j(t'|p_1(t'))$; una costellazione di congetture ç è compatibile con la struttura dell'informazione se tali sono tutte le sue componenti $ç_j$ e ciò si indica con $ç\epsilon Ç|(H,\alpha)^o$.

E' inoltre ovvio che $ç_j$ è compatibile con r^o se $r_j=r^o$.

Definizione 4.9. Una congettura $ç_j$ è compatibile con la distribuzione degli stati di natura r° se $r_j=r^\circ$; una combinazione di congetture $ç$ è compatibile con r° se tali sono tutte le sue componenti $ç_j$ e ciò si indica con $ç\epsilon Ç|r^\circ$.

Sembra intuitivo che se un giocatore conosce la struttura dell'informazione la sua congettura deve rispecchiare una (n-1)-upla di strategie. Vale infatti il seguente lemma.

Lemma 4.2. Se una congettura $ç_j$ è compatibile con r° e $(H,\alpha)^\circ$ allora esiste una (n-1)-upla di strategie σ^j tale che $ç_j$ corrisponde a σ^j.

Dimostrazione.La definizione 4.8 implica che si può costruire una (n-1)-upla di σ^j ponendo $\sigma_{i(x)}(\alpha^\circ(t))=c_j(t|x)$ per ogni $x=p_i(t)\epsilon(X^{\circ j})$. Dalle definizioni 4.6 e 4.9 segue che $ç_j$ corrisponde alla σ^j così costruita. ■

E' ora possibile mostrare che l'equilibrio Nash è certamente rilevante per giochi legittimamente rappresentabili in forma normale, quando i giocatori conoscono la struttura dell'informazione.

Teorema 4.2. Se Γ° è un gioco a rivelazione completa, ogni equilibrio congetturale $(ç,\sigma)$ tale che $ç$ sia compatibile con $(H,\alpha)^\circ$ è un equilibrio congetturale Nash.

Dimostrazione. E' sufficiente dimostrare che se $(ç,\sigma)$ è un equilibrio allora $ç$ corrisponde a σ. La rivelazione completa implica l'informazione finale perfetta, quindi la condizione di non rifiutabilità delle congetture è

[1] $Pr(z|ç_j,\sigma_j)=Pr(z|\sigma)$, $z\epsilon Z$, $j\epsilon I$.

Sommando rispetto a $z\epsilon Z(w)$ si ottiene $r(w)=r_j(w)$ e quindi $r=r_j$. Per il lemma 4.2 c_j corrisponde a una (n-1)-upla di strategie $\sigma^{j\prime}$, inoltre la rivelazione completa implica la biunivocità della funzione degli esiti finali e perciò l'applicabilità del lemma 3.1, per il quale Γ° è un gioco a mossa singola uniformemente partecipativo; perciò dalla [1] segue

$$[2]\quad r[p_{i(z)}(z)]\sigma_j^{z}\Pi_{i\in I\setminus\{j\}}\sigma_i^{z\prime}= r[p_{i(z)}(z)]\Pi_{i\in I}\sigma_i^{z}$$

dove $\sigma_i^{z}:=\sigma_i[\alpha(P(z)\cap S(h_i))]$ e h_i è l'<u>unico</u> insieme non puramente informativo per i (certamente attraversato da $P(z)$) (vedi lemma 3.1). sia $Z^{\sigma}:=\{z\in Z:Pr\{z|\sigma\}>0\}$ il supporto di $Pr\{.|\sigma\}$ e per $z\in Z^{\sigma}$ si definiscano i nodi $t_i^{z}:=S(h_i)\cap P(z)$, si ottiene

$$[3]\quad \sigma_i^{z\prime}=Pr\{Z(t_i^{z})|\sigma\}/Pr\{Z(p_1(t_i^{z}))|\sigma\}=\sigma_i^{z}.$$

La [3] permette di dimostrare che, per ogni z per il quale $\sigma_i^{z}>0$, $\sigma_i^{z\prime}=\sigma_i^{z}$ e quindi $ç_j$ corrisponde a σ^j. ■

Come risulta dal paragrafo 3.7, i giochi che soddisfano le ipotesi del teorema 4.7 sono quelli che ammettono una rappresentazione legittima in forma normale. Inoltre nel paragrafo 3.8 si è spiegato che, se i giocatori conoscono la struttura dell'informazione, vengono eliminate quelle asimmetrie che rendono la forma estesa non completamente equivalente alla forma strategica legittimamente corrispondente. In altre parole lo spazio $Ç|(H,\alpha,r)^{\circ}$ è isomorfo allo spazio delle congetture "costanti" per $\Gamma^{N\circ}$. Dunque il teorema 4.2 mostra che l'equilibrio Nash è un concetto pienamente legittimo per i giochi in forma normale, purchè i giocatori conoscano la struttura dell'informazione. Non è invece necessario assumere che vi sia informazione completa, né che i giocatori ipotizzino a priori la razionalità altrui. Quest'ultima casomai è "rivelata", nel caso dell'informazione completa, dall'eventuale realizzazione e dalla successiva persistenza dell'equilibrio. Simmetricamente, se la razionalità altrui viene assunta e non vi è informazione completa, l'equilibrio "rivela" alcune informazioni sulle preferenze.

Il teorema 4.2 rappresenta un successo almeno parziale rispetto al tentativo di ottenere gli usuali concetti di equilibrio vincolando le congetture degli agenti mediante l'assegnazione di informazioni. In questo caso si è ottenuto l'equilibrio Nash con una restrizione allo spazio $Ç|(H,\alpha,)^{\circ}$, spiegando che l'informazione veramente essenziale è H°. Tuttavia il teorema è limitato ai giochi a rivelazione completa e lo studio del gioco di minaccia mostra che non può essere esteso a tutti i giochi in forma estesa. Infatti, come si può arguire dalla figura 6, per ogni equilibrio Nash σ^* tale che $\sigma_1^*(L)=1$, esiste una classe di equilibri strategicamente equivalenti $Ç(\sigma^*)x\{\sigma^*\}$ che ha la potenza del continuo. Ciò dipende dal fatto che se 1 cede (sceglie L) la strategia di 2 non viene rivelata e quindi 1 non è in grado di rifiutare congetture scorrette. Gioca in questo caso la non biunivocità della funzione degli esiti finali: non tutti gli esiti z individuano un'unica n-upla di strategie pure. L'esempio relativo alla figura 2 è ancora più istruttivo. In questo caso ogni esito rivela le strategie pure (la funzione degli esiti finali f è invertibile), ma l'informazione finale è imperfetta e ciò rende possibile l'esistenza di un equilibrio congetturale non Nash che non è né empiricamente , né strategicamente equivalente a quello Nash.

Per chi abbia compreso e condiviso le argomentazioni metodologiche e logiche esposte in precedenza (paragrafi 1.1, 1.2, 2.4, e 3.6) dovrebbe essere chiaro che i limiti del teorema 4.2 sono da imputarsi al concetto di equilibrio proposto da Nash e non all'approccio qui adottato.

4.4. Equilibri congetturali non Nash: teoremi di esistenza e impossibilità.

Dopo quanto detto in precedenza è legittimo chiedersi in che misura il concetto di equilibrio qui proposto è più generale di quello tradizionale. Infatti da un lato si è usato il comodo espediente di ricorrere al teorema di Nash per dimostrare l'esistenza di un equilibrio congetturale (cfr Hahn [1977] per un procedimento analogo nell'ambito dei modelli parametrici), dall'altro si è dimostrato che sotto certe ipotesi esistono solo equilibri nel senso di Nash e, negate tali ipotesi, detta tesi è stata invalidata solo per mezzo di controesempi. Ma per mostrare che la generalizzazione è rilevante è necessario dimostrare l'esistenza di equilibri non Nash per una generalità di casi. Per raggiungere questo scopo userò anzitutto il metodo di ricavare da un equilibrio Nash un equlibrio non Nash strategicamente e/o empiricamente equivalente nell'ambito di una definita classe di giochi.

Esistono dei giochi a informazione perfetta nei quali ogni volta che un generico giocatore j deve scegliere esiste al più una azione di j che rende possibile il proseguimento del gioco. Tutte le altre azioni sono come rami di un albero (o di un sistema di binari ferroviari) che non contengono alcuna ulteriore ramificazione, sono cioè rami morti. Esiste perciò un unico percorso o tronco del gioco che contiene tutti i nodi decisionali effettivi, cioè non puramente informativi secondo la definizione data nel paragrafo 3.7 (si veda la figura 12). Il gioco di minaccia fa parte di questa classe. Si supponga di modificare il payoff di 1 in modo tale da rendere la strategia pura R strettamente dominante (fig. 13), il gioco così ottenuto ha un unico equilibrio congetturale che, in virtù dell'unicità e del teorema 4.1, è anche un equilibrio Nash. Inoltre, poichè ogni gioco a informazione perfetta possiede almeno un equilibrio Nash in strategie pure, tale deve essere l'equilibrio di cui sopra: è definito infatti da $p=0$, $q=1$, R, r.

In generale se un gioco a informazione perfetta è "a rami morti", la funzione di payoff può essere tale da determinare un unico equilibrio, che necessariamente dovrà essere un equilibrio Nash in strategie pure. Si potrebbe per questa via dimostrare un teorema di impossibilità di equilibri non Nash, ma la classe di giochi individuata dalle ipotesi sarebbe troppo particolare e priva di significative interpretazioni perchè ne valga la pena. Si vedrà invece che escludendo i giochi "a rami morti" è possibile dimostrare l'esistenza di equilibri non Nash.

Definizione 4.10. Un gioco in forma estesa Γ si dice a rami morti se per qualche $z\in Z$ i nodi decisionali non puramente informativi sono tutti predecessori di z, cioè se $(X\setminus P(z))$ è incluso in X_{PI}.

E' possibile dimostrare che un gioco a rami morti è necessariamente ad informazione perfetta, ma tale risultato è irrilevante in quanto segue.

Teorema 4.3. Se Γ è un gioco a informazione perfetta non a rami morti, con $W=\{w\}$ e con almeno due giocatori, allora esistono un equilibrio congetturale Nash (ς^*,σ^*) in

Gioco a rami morti

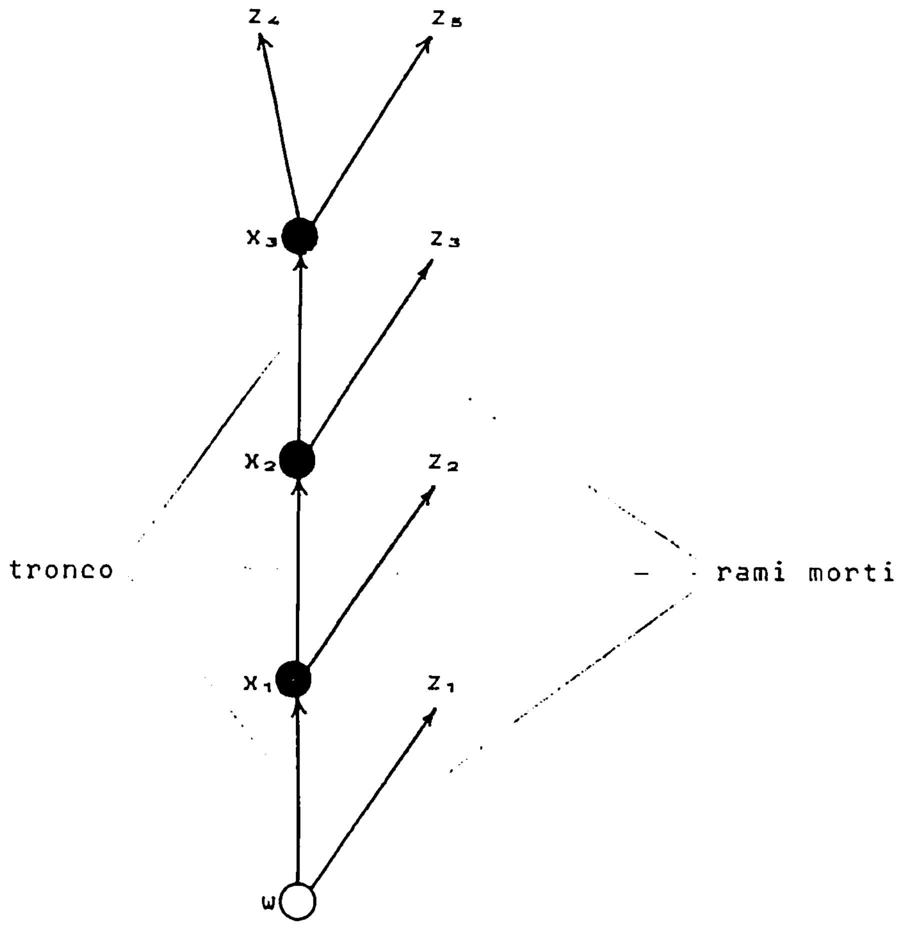
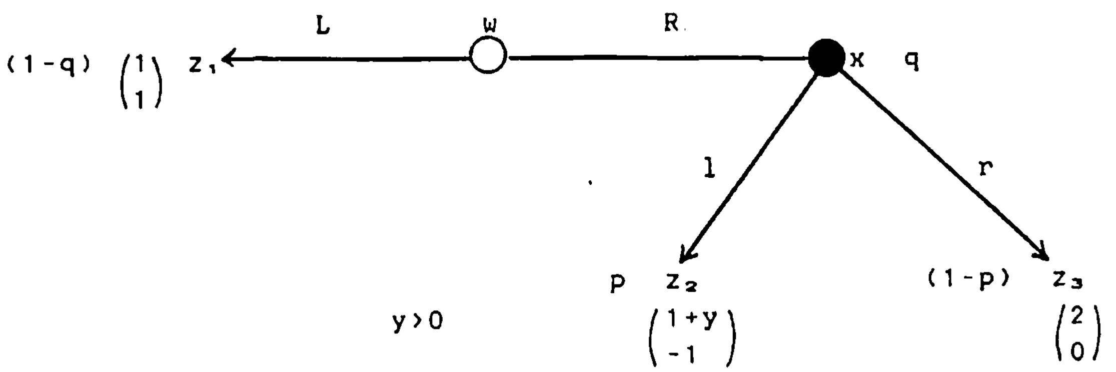


figura 12

Gioco a rami morti con percorso di equilibrio unico coincidente col tronco.



La strategia R è strettamente dominante per 1, quindi l'unico percorso di equilibrio congetturale è w -> x -> z_3, che passa lungo tutto il tronco del gioco. Non è possibile alcun equilibrio congetturale diverso da:

(p=0, q=1, R, r).

figura 13

strategie pure e due equilibri congetturali $(ç^\circ, \sigma^*)$ e $(ç^*, \sigma^\circ)$ tali che $ç^\circ$ è diverso da $ç^*$ e σ° da σ^*.

Il teorema 4.3 afferma che per i giochi ipotizzati esistono almeno due equilibri non Nash, di cui uno strategicamente equivalente a un equilibrio Nash e l'altro solo empiricamente equivalente all'equilibrio Nash considerato (si ricordi che l'equivalenza strategica implica quella empirica, ma non viceversa). Si noti che la condizione $W=\{w\}$ è soltanto formale, perchè se vi fossero più stati di natura, essendo Γ a informazione perfetta, a ognuno di essi corrisponderebbe un sottogioco autonomo.

Dimostrazione. Poichè Γ è un gioco a informazione perfetta, necessariamente esiste un equilibrio Nash in strategie pure σ^* (Kuhn [1953], p 209, corollario 1). Indichiamo con s^* la combinazione di applicazioni nodo -> azione equivalente alla combinazione di applicazioni azione - > probabilità (nulla o unitaria) σ^*; indichiamo inoltre con z^* il nodo finale raggiunto tramite s^* partendo da w, cioè $z^* := f(w, s^*)$. Poichè Γ non è a rami morti, esiste un nodo effettivamente decisionale, cioè non puramente informativo, fuori del cammino $P(z^*)$: esiste $x \in [X \setminus (X_{PI} \cup P(z^*))]$.Per semplificare la notazione poniamo $s(x) := s_{i(x)}(\{x\})$ e $A(x) := \alpha(S(x))$, $s \in S$.

Essendo x effettivamente decisionale, esiste $a \in A(x)$ con a diversa da $s^*(x)$.

Indicata con $ç^*$ la combinazione di congetture corrispondente a σ^*, è possibile costruire σ° e $ç^\circ$ diversi da σ^* e $ç^*$ rispettivamente, tali che $(ç^\circ, \sigma^*)$ e $(ç^*, \sigma^\circ)$ sono equilibri congetturali; ne consegue che $(ç^\circ, \sigma^*)$ è un equilibrio non Nash strategicamente equivalente a $(ç^*, \sigma^*)$ e $(ç^*, \sigma^\circ)$ è un equilibrio non Nash solo empiricamente equivalente a $(ç^*, \sigma^*)$. Per ottenere $ç^\circ$ e σ° basta modificare opportunamente $ç^*$ e σ^*:

$c^\circ_j(\alpha^{-1}(a)|x) = c \in (0,1)$ j diverso da $i(x)$ (per ipotesi esistono almeno due giocatori)

$c^\circ_j(\alpha^{-1}(s(x))|x) = 1-c$,

$ç^\circ = ç^*$ altrove,

$\sigma_{i(x)}{}^\circ(a) = 1$, $\sigma_{i(x)}{}^\circ(s(x)) = 0$, $\sigma^\circ = \sigma^*$ altrove (vedi fig. 14).

Poichè x non appartiene al cammino di equilibrio $P(z^*)$ è evidente che

$$Pr(z^*|ç_j^o, \sigma_j^*)=Pr(z^*|\sigma^*)=Pr(z^*|\sigma^o)=1, \quad j\in I,$$

ne consegue la tesi. ■

Il teorema 4.3 vale solo per una classe di giochi strettamente inclusa in quella dei giochi a informazione perfetta e inoltre gli equilibri non Nash di cui dimostra l'esistenza sono equivalenti dal punto di vista dell'osservazione a equilibri Nash. In effetti la possibilità di ottenere risultati empirici diversi da quelli deducibili da un equilibrio Nash dipende in modo essenziale dal soddisfacimento di almeno una delle due seguenti condizioni:

a) esistono congetture incompatibili con la struttura dell'informazione;

b) l'informazione finale è imperfetta.

E' plausibile ipotizzare che negando a) e b) i soli equilibri ammissibili siano empiricamente equivalenti a un equilibrio Nash e almeno per i giochi a due persone è possibile dimostrarlo, nella forma di un teorema di impossibilità.

Teorema 4.4. Se Γ^o è un gioco a due persone con informazione finale perfetta, non esiste alcun equilibrio congetturale $(ç,\sigma)$ empiricamente non equivalente a un equilibrio congetturale Nash e tale che ç sia compatibile con $(H,\alpha)^o$.

Dimostrazione. Supponiamo che ç sia compatibile con la struttura dell'informazione. Dall'ipotesi di informazione finale perfetta si ricava

$$[1] \quad Pr(z|ç_j,\sigma_j)=Pr(z|\sigma), \quad j=1,2$$

da cui $r^o=r_j$. Per tutti i rami con probabilità positiva le congetture coincidono con le strategie e inoltre c_j corrisponde a qualche strategia σ_i^j. Infatti vale il lemma 4.2 e dalla [1] si ottiene per $Z(p_1(t))\cap Z^o$ non vuoto

$$[2] \quad \sigma_i^j(\alpha(t))=Pr(Z(t)|\sigma)/Pr(Z(p_1(t))|\sigma)=\sigma_i(\alpha(t)).$$

Se σ non è un equilibrio Nash allora σ_i^j è diverso da σ_i per j=1 e/o j=2 (lemma 4.1), ma la strategia attribuita da j a i può differire da quella di i solo per nodi decisionali con probabilità nulla, cioè con tutti i successori finali non in Z^σ e perciò i è indifferente tra σ_i e σ_i^j, posto che j adotti σ_j^i

[3] $E(u_i|\sigma_i^j,\sigma_j^i)=E(u_i|\sigma_i,\sigma_j^i)$

Dalla [3] consegue che $(\varsigma,\sigma_1^2,\sigma_2^1)$ è un equilibrio Nash empiricamente equivalente a (ς,σ), infatti tenendo conto della condizione di razionalità miope

$$E(u_i|\sigma_i^j,\sigma_j^i)=E(u_i|\sigma_i,\sigma_j^i)\geq E(u_i|\sigma_i',\sigma_i^j),\ \sigma_i\in\Sigma_i;$$

quindi $(\sigma_1^2,\sigma_2^1):=\sigma^o$ è un equilibrio Nash e poichè

$$Pr(.|\sigma^o)=Pr(.|\sigma),$$

(ς,σ^o) è empiricamente equivalente a (ς,σ). ■

Si noti che il procedimento dimostrativo usato dipende dal fatto che il gioco sia a due persone. Se i giocatori sono più di due le congetture di i,k,... sulla strategia di j possono essere differenti e quindi non è possibile in generale ottenere un equilibrio congetturale Nash da un equilibrio qualsiasi, assegnando a j una strategia che coincide con le congetture altrui su j.

La prima parte della dimostrazione mette in evidenza che, data l'informazione finale perfetta, è essenziale per l'esistenza di un equilibrio non Nash che qualche percorso del gioco (ovvero qualche possibile partita) abbia una probabilità nulla. Tenedo poi conto che per questi giochi ogni congettura di equilibrio è necessariamente compatibile con la distribuzione degli stati di natura (si veda il corollario 3.1), si può intuire che gli errori veramente essenziali nelle congetture, cioè quelli che influiscono sulla strategia adottata, sono possibili in equilibrio soltanto se qualche giocatore assegna a qualche azione una probabilità nulla. Vale infatti il seguente corollario.

Corollario 4.1. Se Γ^o è un gioco a informazione finale perfetta e $r^o>0$, allora non esistono equilibri non Nash in strategie completemente miste.

Dimostrazione. Se $(ç,\sigma)$ è un equilibrio in strategie completamente miste, allora $Z^\sigma=Z$ e quindi

$$[1]\quad c_j(t|p_j(t))=Pr\{Z(t)|\sigma\}/Pr\{Z(p_j(t))|\sigma\}=\sigma_{i(p_j(t))}(\alpha(t)),\quad p_j(t)\in X^j,\ j\in I.$$

La [1] implica che $(ç,\sigma)$ è un equilibrio congetturale, perchè ç corrisponde a σ. ■

Il corollario 4.1 può interpretarsi così: se un equilibrio è in strategie completamente miste, ogni possibile percorso del gioco viene esplorato; grazie all'informazione finale perfetta, nel lungo periodo ogni strategia viene completamente rivelata a tutti i giocatori e quindi tutte le congetture di equilibrio devono essere esatte.

L'importanza della condizione di compatibilità con la struttura dell'informazione è evidente se si considera quanto segue. In ogni gioco a due persone in forma normale, se un giocatore non conosce la struttura dell'informazione, egli può pensare di essere un leader alla Stackelberg e agire di conseguenza. E' quindi facile costruire un equilibrio alla Stackelberg in strategie pure che è ovviamente non Nash. Tenendo conto inoltre che non sempre un gioco a due persone possiede un equilibrio Nash in strategie pure, è evidente che l'equilibrio non Nash così costruito in generale non è nemmeno empiricamente equivalente a un equilibrio Nash.

E' ora possibile trarre alcune conclusioni sulla rilevanza del concetto di equilibrio di Nash.

1) Nel caso che tutti gli equilibri Nash di un gioco siano tra loro scambiabili è possibile proporre tale equilibrio come soluzione del gioco. Nel paragrafo 2.4 si sono sottolineate le forti connotazioni normative e previsive del concetto di soluzione. Ogni agente, completamente informato sul gioco e sulla teoria dei giochi, calcola la soluzione e massimizza l'utilità attesa sotto l'ipotesi che gli altri si

adeguino ovvero si adegua egli stesso perchè non ha incentivi a deviare. Nel caso che gli equilibri non siano scambiabili la proprietà di Nash diventa un mero test, cui una soluzione qualsiasi deve sottoporsi se si vuole che si autosostenga, che sia coerente.

2) Se si ammette la possibilità di comunicazione tra i giocatori prima del gioco si può immaginare che essi arrivino a un qualche tipo di accordo, ma non sarà accettato nessun accordo che non soddisfi la proprietà di Nash, perchè altrimenti nessun giocatore potrà fare affidamento sul rispetto dell'accordo stesso.

3) Se si prende sul serio il concetto di equilibrio, identificandolo con lo stato stazionario di un processo generato dal comportamento di individui razionali rispetto alle loro teorie e in grado di apprendere, allora l'equilibrio Nash va considerato come un possibile equilibrio congetturale. In 1) e 2) si aggiungono degli elementi estranei al modello di un gioco giocato da individui razionali (cioè miopicamente razionali e in grado di apprendere): la conoscenza da parte degli agenti di una soluzione che non è dedotta dalle ipotesi del modello, ma soltanto sottoposta a un test di compatibilità con esse, e la consultazione "pre-gioco". In entrambi i casi la proprietà di Nash (4.12) risulta essere condizione necessaria per un equilibrio inteso come "autosostenimento" di una combinazione di strategie ricavata al di fuori del gioco. Nei termini della presente impostazione 1) e 2) delineano dei metodi per generare congetture corrette da parte di giocatori completamente informati (metodi per costruire $B_j(\Gamma^o)$ in modo tale che $\sigma^{j*} \epsilon B_j(\Gamma^o)$). Secondo l'approccio qui adottato invece la proprietà di Nash è rilevante quando è condizione necessaria e sufficiente per un equilibrio congetturale o almeno per generare risultati compatibili con un equilibrio congetturale. Si sono quindi individuati due ambiti di rilevanza: quello dei giochi in forma normale e quello dei giochi con informazione finale perfetta, essendo in entrambi i casi noto il gioco in forma estesa Γ^o o almeno la struttura dell'informazione (se si accettano le due ipotesi che la definizione 4.8 sulla compatibilità con la struttura del'informazione).

4) Un discorso a parte merita l'ipotesi dell'informazione completa. Certamente se un giocatore è

completamente informato, ogni sua congettura corrisponde a una combinazione di strategie miste degli altri giocatori. Questa corrispondenza è essenziale per rendere significativo il concetto di equilibrio di Nash, cioè per mostrare che la condizione di Nash è necessaria e sufficiente affinchè certi risultati (combinazioni di strategie o distribuzioni di probabilità sullo spazio dei risultati Z) siano sostenibili come equilibri congetturali. Tuttavia i teoremi 4.2 e 4.4 mostrano che è sufficiente la compatibilità con la struttura dell'informazione per rendere pienamente significativo l'equilibrio di Nash nei contesti adeguati. La definizione di compatibilità con la struttura dell'informazione usata in quei teoremi è valida se sono soddisfatte le due ipotesi esposte nel paragrafo 4.3 e tali ipotesi sono banalmente verificate nel caso dei giochi a due persone con un solo stato di natura. In conclusione il fatto che la condizione di Nash sia necessaria e sufficiente per l'equilibrio dipende da due tipi di ipotesi: quelle sulle regole del gioco (che determinano se c'è rivelazione completa delle strategie oppure o almeno informazione finale perfetta) e quelle sulle teorie e informazioni a priori dei giocatori. Le ipotesi d'indipendenza fatte a proposito delle teorie dei giocatori permettono di ottenere l'equivalenza tra equilibri congetturali e equilibri Nash, per le classi di giochi di cui si è detto, assumendo soltanto che i giocatori conoscano la struttura dell'informazione. Se si vuole evitare quelle ipotesi nell'ambito in cui non sono necessariamente valide, è sufficiente assumere che i giocatori siano completamente informati. Le informazioni a priori sulla razionalità degli altri giocatori non hanno invece alcun ruolo, finchè non si cerca d'interpretare l'equilibrio come soluzione del gioco. Ma si vedrà nel prossimo paragrafo quanto tali ipotesi siano difficili da formalizzare e quanto poco permettano di determinare una vera soluzione.

4.5. Regole di apprendimento e strategie effettive.

Fino a questo momento ci si è occupati soltanto dell'equilibrio. Dal punto di vista dello scienziato sociale l'equilibrio è un concetto rilevante perchè permette di spiegare la persitenza di certi fenomeni descrivendoli come (distribuzioni di probabilità sull'insieme degli) esiti di un gioco e, simmetricamente, permette di prevedere che certe configurazioni non possono sopravvivere a lungo. D'altra parte l'individualismo metodologico pone dei vincoli ai possibili processi di disequilibrio, pur non permettendo di selezionarne uno in particolare, e ciò rende possibili previsioni più accurate delle precedenti in quanto non legate alla persistenza in un non meglio specificato "lungo periodo". Si è visto infatti che lo stesso svolgimento di un gioco può essere considerato come un processo dinamico eventualmente in disequilibrio: è sufficiente che un giocatore venga in possesso di informazioni incompatibili con la sua congettura, in questo caso egli rivedrà i suoi piani e presumibilmente non seguirà più la strategia inizialmente adottata. Il postulato di comportamento razionale permette di escludere che il giocatore adotti una nuova congettura anch'essa incompatibile con l'informazione ottenuta e di prevedere che la nuova strategia sarà ottimale rispetto alla nuova congettura. Da questa combinazione di previsioni negative e positive condizionate dalle possibili infomazioni si può dedurre una previsione sugli esiti del gioco del tipo: "certamente l'esito del gioco apparterrà a Z^* incluso in Z". $(Z \setminus Z^*)$ diventa allora un insieme di falsificatori potenziali, la cui ampiezza (relativa a Z) dipende ovviamente dalla forma estesa del gioco. Nel caso del "pari o dispari" $(Z \setminus Z^*)=\emptyset$, nel gioco della minaccia (figura 4) $(Z \setminus Z^*)=\{z_2\}$.

Esiste un'altra ottima ragione per occuparsi del disequilibrio: se in base alla teoria non si pongono delle limitazioni ai possibili percorsi del gioco, risulta impossibile assegnare ai giocatori informazioni sempre più accurate sul comportamento altrui.

Per il giocatore j non è importante sapere che il giocatore i all'inizio del gioco adotta un certo piano (strategia), se non è sicuro che poi lo seguirà fino in fondo. D'altra parte un piano che permette di prevedere il comportamento di i durante tutto il gioco è certamente rilevante per j, anche se non è il piano inizialmente adottato da i. In altre parole i giocatori usano necessariamente metri diversi per giudicare la rilevanza delle strategie proprie e di quelle degli altri: le strategie proprie sono giudicate sulla base di una congettura sulla quale si è certi, mentre le strategie altrui vengono giudicate come strumenti previsivi del comportamento anche di fronte a eventi inattesi. Dunque per poter assegnare ai giocatori delle informazioni sul comportamento altrui che siano vere nell'ambito del modello, cioè deducibili dalle sue ipotesi, è necessario che tali ipotesi dicano qualcosa sul comportamento a fronte di eventi con probabilità soggettiva a priori nulla.

Studiare il disequilibrio significa studiare l'apprendimento (vedi paragrafo 1.2). Una regola d'apprendimento L_j (L sta per "Learning") descrive il modo in cui un agente cambia congettura a fronte di eventi imprevisti. Se fossero note le regole di apprendimento, sarebbe possibile dedurre da una combinazione di congetture iniziali il processo stocastico che descrive lo svolgimento di un qualsiasi gioco e il concetto di equilibrio perderebbe quasi del tutto la sua rilevanza. Invece ci si limiterà a imporre alcuni vincoli di coerenza. Ciò permetterà di definire le strategie effettive, cioè quelle strategie che prevedono un comportamento plausibile da parte di un giocatore e non necessariamente coincidono con la strategia scelta fin dall'inizio. Questa previsione sarà basata su una naturale specificazione del postulato di razionalità: ogni volta che gli tocca muovere un giocatore sceglie un'azione, o una distribuzione di probabilità sulle azioni possibili, deducibile da una strategia ottimale rispetto a una congettura coerente.

Definizione 4.11. Una applicazione L_j:$Ç_j$x$H(X_j)$->$Ç_j$, che assegna una congettura a ogni coppia congettura-informazione è detta regola di apprendimento per j. Una regola di apprendimento si dice coerente rispetto all'informazione a priori $y°$, se soddisfa i seguenti requisiti: per ogni $h \in H(X_j)$ e ogni $ç_j \in Ç_j|y°$

(4.14) $h \in$Coe $L_j(ç_j,h)$;

(4.15) se $h \in$Coe $ç_j$ allora $ç_j=L_j(ç_j,h)$;

(4.16) se $x<t$, $x \in X_j$, $t \in X_j$ e $H(t) \in$Coe $L_j(ç_j,h)$ allora $L_j(ç_j,H(x))=L_j(ç_j,H(t))$;

(4.17) se esiste $ç_j' \in Ç_j|y^o$ tale che $h \in Coe\ ç_j'$ allora $L_j(ç_j,h) \in Ç|y^o$.

Si indica con $L_j[y^o]$ l'insieme delle regole d'apprendimento coerenti per il giocatore j, quando questi è in possesso dell'informazione a priori y^o.

Le formule contenute nella definizione 4.11 sono solo apparentemente complicate. Basta ricordare che Coe $ç_j$ è la famiglia degli insiemi d'informazione di j che non falsificano $ç_j$, ovvero quegli insiemi che hanno una probabilità, calcolata in base $ç_j$, positiva (paragrafo 3.3). Si ricordi inoltre che il criterio di rifiuto decisionale rigetta una congettura $ç_j$ (o, se si preferisce, le attribuisce una probabilità nulla) in base all'evidenza h, se $h \in (H(X_j) \setminus Coe\ ç_j) := Ref\ ç_j$ e la accetta nel caso contrario (paragrafo 3.5). Vi sono quindi strettissimi legami tra apprendimento coerente e criterio di rifiuto decisionale; tenendo conto di ciò si espliciterà il significato delle (4.14)-(4.17). $ç_j$ è la congettura iniziale in base alla quale j adotta una strategia prima che cominci il gioco;

-(4.14): la congettura adottata in base all'evidenza h deve essere compatibile con h, ovvero

(4.14') $L_j(ç_j,h) = Cr_j^d[L_j(ç_j,h),h]L_j(ç_j,h)$;

-(4.15): j mantiene la congettura $ç_j$ finchè l'evidenza non la contraddice, ovvero

(4.15') $L_j(ç_j,h) = Cr_j^d(ç_j,h)ç_j + [1-Cr_j^d(ç_j,h)]L_j(ç_j,h)$;

-(4.16) quando passa da un insieme d'informazione H(x) ad uno successivo H(t) (x<t) j mantiene la congettura adottata in H(x) se è compatibile con H(t), ovvero

(4.16') $L_j(ç_j,H(t)) = Cr_j^d(L_j(ç_j,H(x)),H(t))L_j(ç_j,H(x)) + [1-Cr_j^d(L_j(ç_j,H(x)),H(t))]L_j(ç_j,H(t))$;

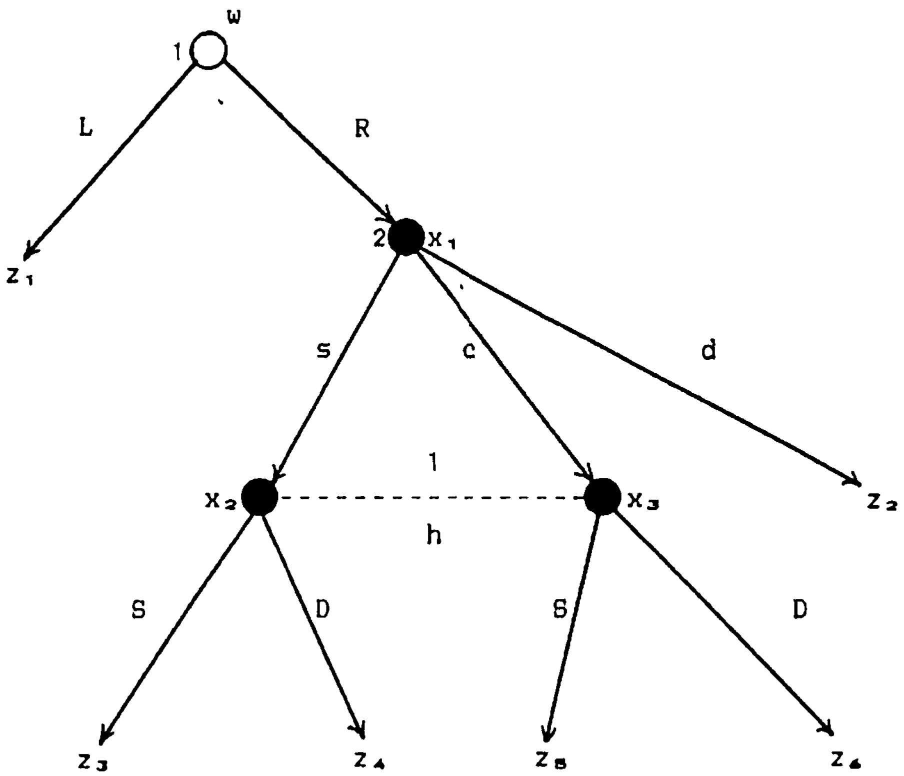
-(4.17) se j dispone di informazioni a priori y^o allora adotta congetture compatibili con esse, purchè non siano contraddette dall'evidenza.

Le formule (4.15)-(4.17) ci dicono che i cambiamenti di congettura o i cambiamenti di opinione sulla verità di certe informazioni a priori sono esogeni, se non sono giustificati da informazioni falsificanti. Ciò è analogo all'ipotesi secondo cui un agente non cambia strategia se non ha incentivi positivi per farlo. Si tratta insomma di una condizione di coerenza non logica, ma temporale, nelle idee e nel comportamento di un individuo. Questa condizione è alla base di tutte le nozioni di equilibrio generalmente accettate. In particolare le condizioni (4.14)-(4.16) unitamente a quella suddeta sulle strategie definiscono una classe di processi nello spazio $Ç\times\Sigma$, il cui insieme di stati stazionari coincide con l'insieme degli equilibri decisionali (vedi paragrafo 3.5). La (4.17) merita un ulteriore commento. L'informazione y^{o} è da considerarsi oggettiva, cioè corrispondente alla realtà descritta dal modello.Il fatto di non specificare y^{o} rende "aperta" la definizione. Non si è infatti definito rigorosamente l'insieme $Ç_j|y^{o}$ per una generica informazione a priori-.Ciò dipende dal fatto che si è rinunciato a una definizione completamente rigorosa delle teorie degli agenti e di come le congetture vengono dedotte dalle teorie. Tuttavia gli insiemi $Ç_j|r^{o}$ e $Ç_j|(H,\alpha)^{o}$ sono già stati rigorosamente definiti (in seguito si definirà l'insieme $Ç|\Gamma^{o}$ delle congettire compatibili con l'informazione completa, chè dato semplicemente dall'intersezione dei due precedenti insiemi, cioè da $Ç_j|(H,\alpha;r)^{o}$); quindi esiste già un ambito in cui la definizione 4.11 è dotata di significato ed operativa. Va inoltre notato che j può disporre anche di informazioni a priori puramente soggettive. Dalla combinazione di tutte queste informazioni, incorporate nella sua teoria, egli deriva una particolare congettura. Quando questa viene falsificata (si parla di una falsificazione che può anche essere puramente virtuale) egli deve decidere quale informazione scartare, cioè dove rivolgere la freccia del modus tollens. Ebbene la (4.17) afferma che j, ogniqualvolta sarà possibile, scarterà delle informazioni puramente soggettive e manterrà quelle oggettive. Ci si potrebbe anche spingere più avanti in questa gerarchizzazione delle informazioni a priori, imponendo una gerarchia tra le informazioni oggettive che indichi in che ordine esse andrebbero eliminate di fronte a una virtuale falsificazione. Per esempio se j ha due compagni di gioco i e k ed è possibile, conoscendo completamente il gioco Γ°, specificare per entrambi le azioni razionali, j potrebbe possedere tutte queste informazioni, la cui congiunzione costituirebbe y°. Ci si potrebbe allora chiedere cosa farebbe j se venisse in possesso durante il gioco di una informazione h incompatibile con la razionalità di i, dato Γ°. La nostra definizione non dice nulla in proposito, ma si può sostenere che j continuerà a credere alla razionalità di k e che il gioco sia effettivamente Γ°, perchè h falsifica y°, ma non queste ultime due ipotesi. Come si vedrà, ragionamenti di questo tipo sono alla base di alcune importanti definizioni di equilibrio. Il motivo per cui essi non sono accolti nella def. 4.11 è che con questi ragionamenti ci si comincia a spingere sul terreno delle ipotesi ad hoc. Perchè j non dovrebbe pensare che in realtà i è razionale, ma la sua funzione di utilità non è quella specificata da Γ°? E se Γ° specifica male la funzione di utilità di i, che motivo ha j di continuare a credere che Γ° la funzione di utlità di k sia ben specificata e quindi k sceglierà le azioni che sono razionali dato Γ°? E inoltre: esiste un modo non arbitrario per scomporre l'informazione y° in più informazioni, di cui y° è la congiunzione? Se tale scomposizione non esiste non è possibile definire una gerarchia tra le "sub-informazioni" in modo tale da sapere quale eliminare di fronte all'evidenza h.

Per chiarire ulteriormente la nozione di regola d'apprendimento coerente si consideri il seguente esempio.

Esempio 4.3. Sia Γ° il gioco rappresentato dalla figura 14. Assumiamo che i giocatori abbiano un'informazione personale completa. In questo caso $\c{C}_j|y^{\circ}=\c{C}_j$, $j=1,2$ e la condizione (4.17) non è vincolante. Qualsiasi regola di apprendimento che soddisfa le (4.14)-(4.16) è coerente con l'informazione personale completa. In particolare una regola d'apprendimento coerente per 1 è tale che se la congettura iniziale $\c{c}_1$ soddisfa la condizione $c_1(z_2|x_1)<1$, allora $L_1(\c{c}_1,h)=\c{c}_1$. Infatti, purchè 1 non scelga l'azione L, l'insieme d'informazione h è raggiungibile secondo la congettura $\c{c}_1$ ($h\in Co\ \c{c}_1$) e quindi 1 non ha motivi di

Regole d'apprendimento coerenti rispetto all'informazione a priori.



Se il gicatore 2 riceve l'informazione x_1 deve attribuirle una probabilità a priori positiva. Se conosce la struttura dell'informazione del gioco e grazie a informazioni a priori puramente soggettive ritiene che sarà scelta L, non per questo di fronte all'evidenza contraria abbandonerà l'informazione a priori oggettiva (H^o, α^o).

figura 14

rigettare $ç_1$ di fronte all'evidenza h. Questo è il requisito (4.15). Ma se fosse $c_1(z_2|x_1)=1$, allora si deve verificare $L(ç_1,h)=ç_1'$ con $c_1'(z_2|x_1)<1$. Ciò infatti equivale ad adottare una nuova congettura compatibile con h ($h\epsilon Coe\ ç_1'$) e questo è ciò che impone il requisito (4.14). La condizione (4.16) non è vincolante perchè i giocatori possono cambiare congettura una sola volta durante il gioco e la (4.16) impone un vincolo più stringente della (4.17) solo se può essere applicata al 2°,3°.... cambiamento di congettura. Assumiamo ora che i giocatori conoscano la struttura dell'informazione: $ç_j\epsilon Ç_j|(H°,\alpha°)$, j=1,2. Ciò equivale a imporre che $c_2(z_3|x_2)=c_2(z_5|x_3)$ e $c_2(z_4|x_2)=c_2(z_4|x_3)$, perchè 1 non può distinguere tra x_2 e x_3 e sceglie tra S e D. In questo caso la (4.17) è vincolante: sia $ç_2$ tale che $c_2(z_1|w)=1$, ne segue che x_1 falsifica $ç_2$ ($\{x_1\}\epsilon Ref\ ç_1$); se a 2 giunge l'informazione x_1 egli capirà di essersi sbagliato a pensare che 1 scegliesse L, ma non avrà nessun motivo di pensare che la struttura dell'informazione sia diversa da H° e infatti adotterà una congettura $ç_2'=L(ç_2,\{x_1\})$ tale che $c_2'(x_1|w)>0$ (per la (4.14)) e $c_2'(z_3|x_2)=c_2'(z_5|x_3)$, $c_2'(z_4|x_2)=c_2'(z_4|x_3)$ (per la (4.17)).

Una caratteristica fondamentale delle regole d'apprendimento è che in base ad esse i giocatori possono definire delle distribuzioni di probabilità condizionate su ogni loro insieme d'informazione. Per facilitare i collegamenti tra la presente esposizione e la letteratura si useranno, ove possibile, gli stessi simboli in riferimento allo stesso oggetto matematico. In particolare si indica con $\mu(x)$ la probabilità subordinata a H(x) che il giocatore i(x) attribuisce a x. Questa notazione è giustificata dal fatto che, per una combinazione di congetture iniziali e regole d'apprendimento assegnata, detta probabilità dipende solo dal nodo x: se σ è una combinazione di strategie completamente miste, allora

$$(4.18)\quad \mu(x) = \frac{Pr\{Z(x)|L_{i(x)}[ç_{i(x)},H(x)],\sigma_{i(x)}\}}{Pr\{Z[H(x)]|L_{i(x)}[ç_{i(x)},H(x)],\sigma_{i(x)}\}}$$

Si osservi che la (4.18) ha significato perchè $\sigma_{i(x)}$ è completamente mista e $L_{i(x)}$ è coerente e quindi il denominatore del membro di destra è positivo. Inoltre $\mu(x)$ è indipendente da $\sigma_{i(x)}$ in virtù dell'ipotesi di memoria perfetta. Infatti tutti i fattori dipendenti da $\sigma_{i(x)}$ del denominatore sono necessariamente comuni al numeratore e si semplificano; se il numeratore contenesse ulteriori fattori dipendenti da $\sigma_{i(x)}$, ciò significherebbe che in x $i(x)$ non ricorda alcune delle sue precedenti azioni, ma questo è escluso dalla memoria perfetta.

La (4.18) implica che per ogni $h \in H(X)$ (si ricordi che $H(X)$ è la famiglia degli insiemi d'informazione) $\Sigma_{x \in h}\mu(x)=1$ (cfr Kreps, Wilson [1982], p 871).

Definizione 4.12. Un sistema di credenze è una funzione $\mu: X \to [0,1]$ tale che

(4.19) $\Sigma_{x \in h}\mu(x)=1, \; h \in H(X)$.

Da μ si derivano distribuzioni di probabilità sugli insiemi d'informazione h e ovviamente μ non va confusa con le μ_j, che sono delle misure di probabilità sull'insieme dei giochi G.

Definizione 4.13. Un sistema di credenze μ si dice coerente rispetto alla n-upla di informazioni $y^\circ := (y_1{}^\circ, y_2{}^\circ, \ldots y_n{}^\circ)$, se esistono e una combinazione di congetture $ç \in Ç|y^\circ := Ç_1|y_1{}^\circ \times Ç_2|y_2{}^\circ \times \ldots Ç_n|y_n{}^\circ$ e di regole d'apprendimento coerenti $L := (L_1, \ldots L_n) \in (\times_{j \in I} L_j[y_j{}^\circ]) := L[y^\circ]$ per le quali vale la (4.18). Un sistema di credenze coerente dedotto da ç e L tramite la (4.18) si indica con $\mu^{c,L}|y^\circ$.

Data l'ipotesi di completa informazione personale, quando un giocatore deve scegliere la sua strategia all'inizio del gioco, egli conosce con certezza (oltre alla sua funzione di utilità) l'arborescenza, i suoi nodi decisionali, la sua struttura dell'informazione e le azioni a lui possibili. Questo complesso di dati "duri" viene chiamato forma decisionale estesa del giocatore. Ma è importante osservare che per ogni insieme d'informazione h è definita una nuova forma decisionale estesa di $i(h)$: l'arborescenza è formata dai nodi in h e dai loro successori, i nodi decisionali e le azioni possibili sono dedotti da i e α mediante restrizione sull'insieme formato da h e i suoi successori.

Definizione 4.14. Una forma decisionale estesa di j è una struttura $\delta_j:=(T,<;X_j,H(X_j),\alpha[S(X_j)])$ deducibile da un gioco in forma estesa $\Gamma:=(T,<;A,\alpha;i,I;H;u;r)$. E' detta forma decisionale estesa in h ($h\in H(X_j)$) la struttura $\delta_h:=(T_h,<_h;H(X_j\cap T_h),\alpha[S(X_j\cap T_h)])$, dove T_h è l'insieme dei nodi in h e di tutti i loro successori, $<_h$ è la restrizione di $<$ su T_h:

-$T_h:=h \cup \{t\in T:(\text{esiste } x\in h: x<t)\}$,

-$<_h$ è un ordinamento parziale su T_h tale che $x<_h t$ se e solo se $x<t$, $x,t\in T_h$.

Anche la definizione 4.14 ha significato in virtù dell'ipotesi di memoria perfetta, infatti tale ipotesi è condizione sufficiente affinchè un qualsiasi $h'\in H(X_j\cap T_h)$ sia incluso in T_h, ma se ciò non si verificasse δ_h non sarebbe una forma decisionale estesa di i(h).

Dall'esposizione dei paragrafi 3.2 - 3.4 risulta evidente che è sufficiente disporre di una forma decisionale estesa per definire una congettura e scegliere una strategia ottimale rispetto ad essa. Se la forma decisionale estesa è δ_h, le congetture e le strategie definite su δ_h si possono ottenere per restrizione a partire da congetture, regole d'apprendimento e strategie date. Si indica con c_h^L la restrizione di $L_{i(h)}(\varsigma_{i(h)},h)$ su T_h e con σ_h la restrizione di $\sigma_{i(h)}$ su T_h e si pone $r_h(x):=\mu^{\sigma\cdot L}(x)$, $x\in h$, $\varsigma_h^L:=(r_h,c_h^L)$; cioè, posto $j=i(h)$ e omettendo il riferimento a $y°$ per non appesantire ulteriormente la notazione si ha:

- $\sigma_h:\alpha[S(X_j\cap T_h)]\to[0,1]$, $\sigma_h(a)=\sigma_j(a)$, $a\in\alpha[S(X_j\cap T_h)]$
- $c_h^L:(T_h\setminus h)\times(T_h\cap X^j)\to[0,1]$, $c_h^L(t|p_1(t))=c_j'(t|p_1(t))$, $p_1(t)\in(T_h\cap X^j)$, $\varsigma_j':=L_j(c_j,h)$.

In base a σ_h e ς_h^L si può definire la probabilità soggettiva di $z\in Z(h)$ per il giocatore $j=i(h)$ che si trova in h; basta moltiplicare la probabilità del predecessore di z in h $(\mu^{\sigma\cdot L}(h_z))$ per il prodotto delle probabilità degli archi corrispondenti ad azioni altrui (date da c_h^L) e degli archi corrispondenti ad azioni di i(h) (date da σ_h), tenendo conto che la successione degli archi deve condurre in z:

$$(4.20)\quad Pr(z\,|\,h, c_h^L, \sigma_h) :=$$

$$:= \mu^{o,L}(h_z) \prod_{x \in (T_h \cap X^j)_z} c_h^L[s(x,z)\,|\,x] \prod_{P_i(t) \in (T_h \cap X_j)} \sigma_h[\alpha(t)].$$

L'utilità attesa per i(h) quando si trova in h è quindi

$$(4.21)\quad E(u_{i(h)}\,|\,h, \text{ç}_h^L, \sigma_h) := \Sigma_{z \in Z(h)} Pr(z\,|\,h, \text{ç}_h^L, \sigma_h)\, u_j(z).$$

Come si è visto nel paragrafo 3.3, la famiglia degli insiemi d'informazione di j raggiungibili con una strategia σ_j si indica con Rel σ_j. Per valutare se una certa strategia σ_j sarà effettivamente messa in atto non è certo il caso di considerare il comportamento relativo a forme decisionali δ_h con $h \in (H(X_j) \setminus \mathrm{Rel}\ \sigma_j)$, tali δ_h sono irrilevanti perchè la strategia σ_j è tale che l'insieme d'informazione h non sarà mai raggiunto. . Dunque una strategia effettiva σ_j dovrà prescrivere comportamenti plausibilmente razionali solo per forme δ_h con $h \in \mathrm{Rel}\ \sigma_j$. Per questi insiemi d'informazione la probabilità (4.20) è semplicemente la probabilità subordinata a h, calcolata mediante $L_j(\text{ç}_j, h)$:

$$(4.22)\quad Pr(z\,|\,h, c_h^L, \sigma_h) = \frac{Pr(z\,|\,L_j(\text{ç}_j, h), \sigma_j)}{Pr(Z(h)\,|\,L_j(\text{ç}_j, h), \sigma_j)}, \qquad j = i(h).$$

Si dispone ora di un linguaggio formale sufficientemente ricco per definire le strategie effettive e enunciare il postulato di comportamento razionale in modo rigoroso e completo.

Definizione 4.15. Una strategia σ_j si dice effettiva rispetto a una congettura $\text{ç}_j \in \text{Ç}_j\,|\,y^o$ e all'informazione a priori y^o, se esiste una regola d'apprendimento coerente $L_j \in \mathbf{L}_j[y^o]$ tale che, per ogni $h \in \mathrm{Rel}\ \sigma_j$, σ_h sia miopicamente razionale su δ_h , cioè si abbia

$$E(u_j\,|\,h, c_h^L, \sigma_h) \geq E(u_j\,|\,h, \text{ç}_h^L, \sigma_h'),\quad \sigma_j' \in \Sigma_j,$$

ovvero $\quad \sigma_h \in \mathrm{Argmax}\ E(u_j\,|\,h, \text{ç}_h^L, \sigma_h').$

L'insieme delle strategie effettive rispetto a ç_j e a y^o si indica con $\Sigma_j^*(\text{ç}_j)|y^o$. Una strategia ç_j è semplicemente detta effettiva rispetto a y^o se esiste una congettura $\text{ç}_j \epsilon \text{Ç}_j|y)$ tale che $\sigma_j \epsilon \Sigma_j^*(\text{ç}_j)|y)$. L'insieme delle strategie effettive di j si indica con $\Sigma_j^*|y^o := U_{\text{ç}\epsilon\text{Ç}|y^o}\Sigma_j^*(\text{ç}_j)|y^o$. L'indicazione di y^o viene omessa quando $\text{Ç}_j|y^o=\text{Ç}_j$; in questo caso si usano semplicemente le espressioni "strategia effettiva rispetto a ç_j" e "strategia effettiva". Conformemente alla usuale notazione si usa la lettera S per riferirsi alle sole strategie pure, cioè si indica con $S_{j*}|y^o$ l'insieme delle strategie pure effettive rispetto a y^o.

Si può dare subito una applicazione semplice e importante alla nozione appena definita. Si consideri ancora una volta il gioco di minaccia rappresentato nella figura 4, e si supponga che vi sia completa informazione. Il giocatore "minacciante" (2) dispone di un'unica strategia effettiva: la strategia pura (x,r), che assegna all'informazione x ("1 non ha ceduto alla minaccia") l'azione r ("non attuare la minaccia"). Infatti, data l'informazione {x}, 2 si trova in una nuova forma decisionale $\delta_{(x)}$ in cui è banalissima la scelta dell'azione razionale: $u_2(z_3)=E(u_2|\{x\},\text{ç}_{(x)}{}^L,r) > E(u_2|\{x\},\text{ç}_{(x)}{}^L,l)=u_2(z_2)$. Si può allora formalizzare l'ipotesi secondo 2 è razionale imponendo $\sigma_2 \epsilon \Sigma_2^*$. Si può inoltre formalizzare l'ipotesi secondo cui 1 è completamente informato (sul gioco) e sa che 2 è razionale nel modo seguente:

$$B_1(\Gamma^o)=S_2^*=\{(1,r)\},\ 1 \text{ usa } \mu_j|\Gamma^o, \text{ quindi}$$
$$c_1(z_3|x)=1$$

l'insieme delle congetture compatibili con questa informazione a priori è $\text{Ç}_1|\Sigma_{2*}=\{\text{ç}_1 \epsilon \text{Ç}_1 : c_1(z_3|x)=1\}$, cioè è l'insieme (con un unico elemento) delle congetture di 1 corrispondenti a una strategia effettiva di 2. 1 massimizza l'utilità attesa rispetto a questa congettura scegliendo R, cioè resistendo alla minaccia, che non è credibile. Quindi assegnando a 1 questa informazione a priori si seleziona un unico possibile percorso (w -> x -> z_3) e un unico possibile equilibrio, quello che ogni buon teorico ritiene essere l'unico ragionevole. Si noti però questo risultato non è stato ottenuto con una definizione di equilibrio più