3. EQUILIBRI CONGETTURALI E TEORIA DEI GIOCHI

In questo capitolo si comincerà ad introdurre le congetture nella struttura formale della teoria dei giochi.

Finora non si è fatta una distinzione precisa tra teorie e congetture. Nel paragrafo 1.2 è stata esposta la nozione di "teoria di un agente", mutuata da Hahn con alcune modificazioni. Si tratta di un sistema di proposizioni verofunzionali (cioè appartenenti alla "logica del certo") e probabilistiche (appartenenti alla "logica dell'incerto") tra loro integrate in modo da poter produrre tutte le previsioni conzionate di cui l'agente ha bisogno per poter prendere le sue decisioni. Quando nel linguaggio comune si distingue tra "teoria" e "congetture" di norma si usano due diversi criteri. Molti usano il termine "teoria" per indicare qualcosa di "solido" , basato su assiomi certi e deduzioni altrettanto certe e contrappongono a ciò le "fragili" e incerte "congetture". I precendenti capitoli dovrebbero aver già chiarito che (certezza delle deduzioni a parte) la distinzione qui adottata non può avere nulla a che fare con questo criterio. Le teorie degli agenti sono fallibili, anzi di norma sono false e vengono confermate dai fatti solo in equilibrio. Esse sono certe solo nel senso che, per definizione, sono qualcosa cui gli agenti credono con probabilità uguale a uno, in quanto sono esse stesse la base ultima per l'attribuzione di probabilità (condizionate) agli eventi. La distinzione del linguaggio comune, cui qui si fa riferimento, è quella secondo la quale le teorie sono strutture formali complesse, che normalmente contengono una spiegazione del perchè in certe condizioni dovrebbero verificarsi certi eventi, mentre le congetture sono strutture formali semplici in base alle quali si fanno delle previsioni condizionate del tipo "se A, allora B" oppure "se A, allora la probabilità di B è $p(B|A)$". Se esiste un rapporto tra la teoria e le congetture di una persona, questo dovrebbe essere un rapporto di implicazione delle seconde dalla prima. E' in questo senso che qui si intendono le congetture. Nel paragrafo 4.2 esse saranno formalmente definite come un sistema di probabilità condizionate e saranno discusse le connessioni tra tale definizione e la nozione di "teoria di un agente" esposta nel paragrafo

1.2. Si vedrà che una congettura va considerata come la forma "quasi ridotta" della teoria di un agente. La congettura contiene tutto ciò di cui l'agente ha bisogno per fare le sue previsioni sull'andamento del gioco, mossa dopo mossa, e (quasi) nulla di più.

Il motivo per cui le congetture vengono introdotte per prime, benchè siano logicamente secondarie rispetto alle teorie, è che sono semplici da definire, matematicamente trattabili e permettono di definire formalmente nell'ambito della teoria dei giochi il generale concetto di equilibrio che caratterizza l'individualismo metodologico, mettendone in evidenza la caratteristica essenziale: l'assenza di apprendimento. Gli equilibri così definiti sono chiamati **equilibri congetturali**. Essi descrivono situazioni sociali in cui la costellazione delle teorie degli agenti e la combinazione di strategie da queste indotta sono tali da non generare informazioni in grado di falsificare le congetture stesse. Come si vedrà il problema principale è quello di definire un adeguato criterio di rifiuto per gli agenti. Poichè l'ambito è quello dei giochi in forma estesa, in cui si dà una rappresentazione dinamica dello svolgimento del gioco, è possibile soffermarsi sulle informazioni che ogni agente riceve prima di prendere ogni singola decisione, cioè prima di scegliere una tra più azioni alternative. Se l'agente viene informato del verificarsi di un evento a cui aveva attribuito una probabilità nulla, allora la sua congettura è falsificata, egli ne adotta una diversa e rivede i suoi piani. Anzi sarebbe più corretto dire che egli formula dei piani del tutto nuovi riguardanti azioni che precedentemente non aveva realmente preso in considerazione. Può darsi che nessun agente riceva durante il gioco questo tipo di informazioni falsificanti. In questo caso si dice che si è prodotto **un equilibrio decisionale**. Ma gli agenti ricevono delle informazioni anche alla fine del gioco, quando ormai non dispongono di ulteriori mosse e possono soltanto recepire passivamente i messaggi prodotti dal sistema. Anzitutto essi ricevono un guadagno (ovvero vengono a conoscenza di eventi cui attribuiscono una utilità) e in base a tale guadagno possono farsi un'idea di quale sia stato l'andamento del gioco. Inoltre conservano tutte le informazioni acquisite durante il gioco, comprese quelle relative alle azioni che essi stessi hanno scelto e quelle che potrebbero aver ricevuto dopo la loro ultima mossa, infatti sono dotati di una memoria perfetta ("perfect recall"). Il prodotto di questi due tipi di informazioni costituisce le cosiddette **informazioni finali.** Si tenga presente che le informazioni finali non sempre sono tali da far capire esattamente come si è svolto il gioco. Quando questo si verifica per tutti gli agenti, si dice che il gioco è caratterizzato da una **perfetta informazione finale.** L'informazione finale è fondamentale per capire se alla fine del gioco gli agenti sono soddisfatti di aver adottato una certa strategia, oppure sono "pentiti". E' chiaro che quest' ultimo caso può verificarsi solo quando le informazioni finali sono tali da invalidare la congettura in base alla quale l'agente aveva adottato la sua strategia. Quando ogni agente alla fine del gioco è soddisfatto della strategia che aveva inizialmente adottato, si ha un **equilibrio strategico.** La memoria perfetta degli agenti implica che le loro informazioni finali siano più accurate di quelle ricevute durante il gioco, quidi le condizioni di equilibrio strategico sono più forti delle condizioni di equilibrio decisionale: l'equilibrio strategico implica quello decisionale, ma non viceversa.

Si è già detto che il contesto formale in cui verranno definiti i nuovi concetti è quello dei giochi in forma estesa. Tra questi giochi si prenderanno in considerazione solo quelli finiti. Da un punto di vista matematico ciò permetterà di ricorrere prevalentemente ad algoritmi di tipo combinatorio e di introdurre le necessarie nozioni probabilistiche nel modo più semplice possibile. Le distribuzioni di probabilità potranno essere rappresentate come punti di spazi euclidei con un numero di dimensioni uguale a quello degli eventi elementari considerati. Ciò permetterà di concentrare l'attenzione sui nuovi concetti introdotti, ma il lettore matematicamente preparato potrà rendersi conto che tutte le definizioni più importanti possono essere estese ad ambiti molto più generali. Nel primo paragrafo di questo capitolo si descriveranno i giochi finiti in forma estesa e si introdurrà la notazione di base che verrà usata nel seguito della dissertazione.

Il motivo per cui si fa riferimento ai giochi in forma estesa è che nella forma normale di un gioco non compaiono degli elementi che sono essenziali per la caratterizzazione degli equilibri. Anzitutto nella forma normale manca una specificazione di quelle informazioni in base alle quali gli agenti possono rifiutare o ritenere valide le loro congetture. Per rimediare a questo ci sono due possibili modi: si può postulare che dopo aver scelto la sua strategia ogni agente venga informato sulle strategie scelte dagli altri agenti, oppure si può postulare che le uniche informazioni ricevute dagli agenti siano quelle relative al guadagno. Ma si tratta di ipotesi estreme, che nella maggior parte dei casi non possono rappresentare la realtà. Infatti ogni agente può al più osservare le scelte compiute dagli altri nelle situazioni che si sono effettivamente verificate e non le scelte che essi avrebbero compiuto in situazioni diverse. Quindi di norma non è possibile osservare le strategie altrui. Tuttavia ciò che si riesce a osservare di tali strategie può integrare le informazioni implicite nel guadagno ricevuto, rendendole più accurate. Inoltre la letteratura più recente ha messo in evidenza che certe strategie implicano delle minacce o delle promesse non credibili da parte degli altri agenti e quindi il loro annuncio in un eventuale processo di contrattazione non sarebbe considerato rilevante. Sulla base della forma normale non è possibile capire se una strategia implica minacce o promesse non credibili. I rapporti tra rappresentazioni in forma estesa e rappresentazioni in forma strategica verranno esaminati dal punto di vista del nuovo concetto di equilibrio qui introdotto e quindi dal punto di vista della rappresentazione delle informazioni. I problemi relativi alla credibilità saranno invece esaminati nel prossimo capitolo (paragrafi 4.5 e 4.6), quando la definizione delle teorie degli agenti permetterà di precisare le loro eventuali informazioni a priori relative alla razionalità altrui.

Si seguirà qui l'uso corrente supponendo che gli agenti possano scegliere non solo tra azioni o strategie alternative, ma anche tra distribuzioni di probabilità delle prime o delle seconde. Ciò renderà necessarie alcune brevi considerazioni sul significato da dare alla scelta di una distribuzione di probabilità. L'estensione delle possibilità di scelta implica l'estensione del concetto di strategia. Le strategie pure sono gli usuali piani che prescrivono le azioni in base alle informazioni, mentre le strategie miste sono delle distribuzioni di probabilità sull'insieme delle strategie pure. Ma nell'ambito dei giochi in forma estesa è possibile prendere in considerazione anche le azioni miste, cioè le distribuzioni di probabilità sull'insieme delle azioni possibili in certe circostanze. Si può allora immaginare che i piani degli agenti prescrivano di scegliere certe azioni miste quando si verificano certe circostanze. Questi piani sono detti "strategie comportamentali". Nel paragrafo 3.3 saranno riportati i fondamentali concetti e risultati relativi alle strategie miste e alle strategie comportamentali, esposti in un articolo di Kuhn (Kuhn [1953]). Nel seguito si farà principalmente riferimento alle strategie comportamentali (nell'ambito dei giochi in forma estesa naturalmente), ma a volte si renderà opportuno il riferimento alle strategie miste. Questa ambivalenza è resa possibile dalla completa equivalenza dei due concetti nell'ambito dei giochi caratterizzati da memoria perfetta, che sono quelli considerati in questa sede (Kuhn [1953], pp 210-216).

3.1. Giochi in forma estesa: definizioni, ipotesi, interpretazioni.

Per comprendere la formalizzazione dei giochi in forma estesa è opportuno fare riferimento ai giochi nel senso comune del termine: "dama", "scacchi", "pari o dispari", "sasso, forbice, carta", i vari giochi di carte e così via.

La prima cosa da capire è la rappresentazione geometrica di un gioco mediante i grafi ad albero. Nella teoria dei giochi vengono spesso distinti tra loro eventi e situazioni che normalmente vengono considerati indistinguibili. Il motivo è che non si tiene conto soltanto della azione che viene compiuta in un certo momento, ma anche del contesto in cui questa azione viene compiuta; contesto che può essere conosciuto perfettamente o imperfettamente dall'agente e che equivale a una storia completa di tutte gli eventi casuali e/o azioni precedenti. Riguardo a ciò si faranno due esempi.

Si pensi alle prime tre mosse di una partita di scacchi. Alla prima mossa il bianco muove il cavallo in C3 e alla terza lo muove in B5; il nero alla seconda mossa sceglie una qualsiasi alternativa permessa che non interferisce con il cavallo del bianco, ad esempio muove un pedone in E5. Si supponga ora che la prima e la terza mossa del bianco siano differenti: cavallo in A3 e, dopo la mossa del nero, cavallo in B5. Come sono le posizioni dei pezzi dopo queste due diverse sequenze di mosse? Esattamente identiche. Da questo punto di vista la situazione oggettiva della partita dopo la terza mossa, che è perfettamente nota ai giocatori, è la stessa per entrambe le sequenze. Ma la teoria dei giochi distingue tra le due situazioni per il semplice fatto che le sequenze di azioni che le hanno prodotte sono diverse. Tali sequenze sono geometricamente rappresentate mediante la selezione di un percorso su un grafo ad albero. Il primo nodo, la radice dell'albero, rappresenta la posizione dei pezzi all'inizio della partita ed anche lo stato d'informazione del bianco prima della mossa iniziale. Da tale nodo si diramano 20 archi, tanti quanti le possibili alternative a disposizione del bianco. All'estremità opposta al nodo iniziale di ogni arco c'è un altro nodo che rappresenta la storia/situazione della partita e anche lo stato d'informazione del nero prima della sua mossa. Da ognuno di questi nodi si diramano altri 20 archi, corrispondenti alle alternative a disposizione del nero, ognuno dei quali conduce in un nodo che rapresenta la situazione/storia della partita dopo le prime due mosse e anche lo stato d'informazione del bianco prima della successiva mossa. Dal nodo che si raggiunge con le prime due azioni della prima sequenza si diramano 26 archi, che rappresentano le alternative del bianco in quella situazione; dal nodo che si raggiunge con la seconda sequenza si diramano 24 archi. Ogni arco è orientato in modo da rappresentare il trascorrere del tempo di gioco. Poichè i nodi non rappresentano solo la posizione dei pezzi sulla scacchiera ma anche la "storia" delle azioni che hanno prodotto quella configurazione, non è possibile che due archi conducano allo stesso nodo. Quindi quella configurazione che si produce con entrambe le sequenze descritte è rappresentata da due nodi diversi. Esiste una corrispondenza biunivoca tra i nodi del grafo orientato ad albero ed i percorsi parziali che conducono a quei nodi. I nodi rappresentano la situazione di gioco, lo stato d'informazione oggettivo (di un osservatore esterno) e in certi casi anche lo stato d'informazione dei giocatori. I percorsi parziali che conducono a quei nodi rappresentano la storia parziale della partita. La biunivocità della corrispondenza permette di identificare storie parziali e situazioni oggettive. Gli archi rappresentano le azioni alternative disponibili per ogni situazione/storia oggettiva precedente. Ma per identificare correttamente le azioni bisogna considerare la situazione soggettiva dell'agente, cioè le informazioni a lui disponibili. Come si mostrerà col prossimo esempio, due **diversi archi** possono rappresentare la stessa azione.

Si consideri la prima mano di una partita a "briscola". Quando il pri~~o~~mo giocatore deve giocare la sua prima carta, egli non conosce le carte in mano al secondo giocatore, ma oggettivamente la situazione è predeterminata. Infatti dopo aver mescolato un mazzo di 40 carte si ottiene una tra 40! possibili permutazioni e poichè esiste un solo modo di distribuire le carte, risultano a priori determinate tutte le carte che avranno i giocatori nel corso della partita. Ognuna di queste 40! possibili distribuzioni viene rappresentata con un diverso nodo iniziale detto "stato di natura" o anche stato del "mondo". Quando ogni giocatore riceve le prime tre carte e vede la carta scoperta che determina il seme dominante, gli stati di natura che ognuno ~~di~~ di essi può ancora ritenere possibili diventano 36!. Poichè il primo giocatore non può distinguere tra questi stati di natura (cioè conosce solo le tre carte che ha ricevuto) e può scegliere tra 3 alternative, ci vogliono ben 3x36! archi per rappresentare le sue azioni, e la stessa azione corrisponde a 36! archi. Ogni arco rappresenta la scelta di una carta in una situazione oggettiva (distribuzuione) tra quelle ritenute possibili dall'agente in base alle carte che ha in mano. Inoltre la scelta di una stessa carta, poniamo il fante di cuori, può corrispondere a una diversa azione secondo il linguaggio della teoria dei giochi. Infatti è cosa ben diversa giocare questa carta sapendo che i cuori sono il seme dominante piuttosto che nel caso contrario; inoltre si dovrà tenere conto delle altre due carte. In base alla notazione qui adottata le azioni vengono distinte tra loro anche in base allo stato d'informazione soggettivo dell'agente che deve scegliere. Tale stato d'informazione è rappresentato dall'insieme delle situazioni/storie oggettive tra cui il giocatore in questione non è in grado di distinguere. Si tratta quindi di un insieme di nodi, chiamato "insieme d'informazione".

Nella dama, negli scacchi e nei giochi di carte esiste una precisa successione di mosse, stabilita dalle regole del gioco, che ammette una rappresentazione ideale mediante l'uso di grafi orientati ad albero (tanti quanti sono gli stati di natura). Ma come rappresentare i giochi a mosse simultanee? L'espediente è quello di fissare un ordine arbitrario tra le mosse simultanee e definire gli insiemi d'informazione in modo tale da non far conoscere a chi muove dopo le scelte effettuate da chi muove prima. L'esempio più semplice è quello del "pari o dispari". Si approfitterà di tale semplicità per mostrare nella figura II come si rappresenta graficamente un gioco in forma estesa. Il giocatore 1 vince quando la somma delle giocate è pari, il giocatore 2 vince nel caso opposto (si tratta di un gioco a somma zero). Si può immaginare che 1 scelga per primo scrivendo un numero da 1 a 5 su una scheda, poi consegnata ad un arbitro. Poi sceglie 2 comunicando all'arbitro un numero da 1 a 5, ovviamente senza sapere cosa ha scelto 1. Poi l'arbitro comunica la somma e assegna guadagni e perdite secondo che sia pari e dispari. Naturalmente l'unica scelta realmente rilevante a disposizione dei giocatori è quella tra un numero pari e un numero dispari. Lo stato d'informazione di 2 è rappresentato da una linea tratteggiata che unisce i due nodi corrispondenti alle due possibili scelte (già avvenute) di 1, essa indica che 2 è incapace di distinguere tra le due situazioni che oggettivamente si possono essere prodotte con la scelta di 1. Nella figura II compare una legenda, valida anche per tutte le figure successive.

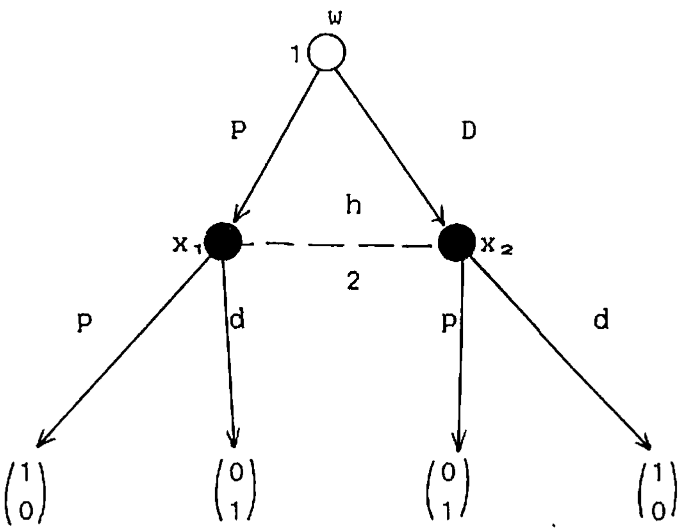
A questo punto dovrebbe essere possibile comprendere una descrizione formale dei giochi finiti in forma estesa.

Un gioco finito in forma estesa è composto essenzialmente da sei elementi:

1) uno o più alberi che rappresentano tutte le possibili storie o svolgimenti del gioco o partite: gli alberi sono tanti quanti gli stati di natura e il complesso di tutti gli alberi è chiamato "arborescenza";

2) una regola che stabilisce chi deve giocare in ogni

Gioco del "pari o dispari".



forma normale

2 / 1	p	d
P	1,0	0,1
D	0,1	1,0

Legenda

simboli grafici	simboli numerici	simboli letterali	significato
○		w	nodo decisionale iniziale o stato di natura
●		x_1	nodo decisionale non iniziale: storia parziale, situaz. ogg.
⟶			archi: azioni scelte in una data situazione oggettiva
	$\binom{1}{0}$ $\binom{0}{1}$ ...	z_1, z_2,..	nodi finali:storie complete e relativi guadagni dei giocatori
●----●		$h=\{x_1,x_2\}=$ $H(x_1)=H(x_2)$	insieme d'informazione del giocatore i(h)
		P,D,p,d.	azioni:scelte in base a una data informazione soggettiva
	1, 2	i(w), i(h)	giocatori cui tocca sceglie-re nelle circostanze w e h

figura II

possibile circostanza, cioè per ogni possibile storia parziale (e quindi specifica quanti sono i giocatori e li distingue assegnando a ognuno un diverso numero);

3) una regola che stabilisce tra quali storie parziali (o nodi decisionali) sono in grado di distiguere i giocatori coerentemente con l'assegnazione dei turni di gioco;

4) una denominazione di tutte le possibili scelte a disposizione dei giocatori, coerente con la struttura dell'informazione, tale cioè da assegnare nomi o etichette diverse ad azioni compiute in circostanze soggettive diverse e nomi uguali ad azioni reciprocamente corrispondenti compiute nelle stesse circostanze soggettive e in diverse circostanze oggettive;

5) una funzione di "payoff" o di utilità che assegna a ogni giocatore un guadagno per ogni possibile storia o partita o nodo finale;

6) una distribuzione di probabilità sull'insieme degli stati di natura o nodi iniziali.

Ognuno di questi elementi è precisamente rappresentato da un oggetto matematico (la formalizzazione e la notazione sono mutuate con alcune modifiche e integrazioni da Kreps, Wilson [1982]).

1) L'insieme delle possibili storie è dato da una arborescenza. Un'arborescenza è una coppia $(T,<)$ costituita da un insieme di nodi T, che si assume essere finito, e da una relazione binaria di precedenza "$<$" che definisce un ordinamento parziale su T con la seguente proprietà: per ogni nodo $t \in T$ l'insieme dei suoi predecessori $\{x \in T: x<t\}$ è completamente ordinato da $<$.

Il fatto che $<$ sia un ordinamento (e non un preordinamento) esclude la riflessività: nessun nodo può precedere sé stesso. La relazione $x<x'$ indica che esiste una successione di archi orientati che connette x con x', essendo l'orientamento da x verso x';l'ordinamento è parziale perchè non tutte le coppie di nodi sono connesse. Se $x<x'$, significa che x rappresenta una storia parziale i cui successivi sviluppi sono rappresentati da x'. L'insieme dei predecessori di t si indica con $P(t)$, cioè $P(t):=\{x \in T:x<t\}$ (":=" vuol dire "uguale per definizione"). Il fatto che per ogni t $P(t)$ sia completa-

mente ordinato significa che due successioni di archi non possono portare allo stesso nodo: esistono solo biforcazioni (o "k-forcazioni"), non c'è nessun ricongiungimento (si pensi all'esempio degli scacchi). I nodi iniziali sono quelli senza alcun predecessore; essi rappresentano gli stati di natura o del mondo, si indicano con la lettera w (dall'inglese "world") e costituiscono l'insieme W. I nodi finali sono quelli senza successori: si indicano con la lettera z (l'ultima dell'alfabeto) e costituiscono l'insieme Z, detto anche insieme dei risultati o degli esiti finali. I nodi non finali sono chiamati nodi decisionali, perchè, salvo eccezioni, rappresentano delle circostanze in cui un giocatore deve operare una scelta tra più alternative; essi sono di norma indicati dalla lettera x e costituiscono l'insieme dei nodi decisionali X. Il predecessore immediato di un nodo t si indica con $p_1(t)$, cioè $p_1(t):=\max P(t)$ (si intende che "max" è relativo alla relazione $<$). Il predecessore n-esimo di t si indica con $p_n(t)$: $p_n(t):=p_{n-1}(t)$, con t tale che $p_{n-1}(t)$ non appartiene a W (cioè $p_{n-1}(t)\epsilon T\setminus W):=W^c)$. Il numero dei predecessori di t (cioè il numero di azioni da cui è costituita la storia parziale cui t corrisponde) si indica con $l(t)$: $l(t):=\#P(t)$ ovvero $l(t)$ tale che $p_{l(t)}(t)\epsilon W$. L'insieme dei successori immediati di x, corrispondente all'insieme degli archi che si diramano da x, si indica con $S(x)$: $S(x):=\{t\epsilon T:x=p_1(t)\}$; è inoltre comodo poter indicare il successore immediato di x che porta in t: si usa la notazione $s(x,t)$ $(x<t)$. In una situazione oggettiva x è di fondamentale importanza ciò che è successo, ma lo è ancora di più ciò che può ancora succedere, cioè l'insieme dei risultati raggiungibili da x; tale insieme si indica con $Z(x)$: $Z(x):=\{z\epsilon Z:x<z\}$. Altre definizioni relative alla arborescenza del gioco saranno usate in seguito, ma sono comunque già incluse nella seguente tabella riassuntiva.

nome	notazione	definizione
.insieme dei nodi terminali o risultati	Z	$\{t\epsilon T:(\text{non esiste } x\epsilon T:t<x)\}$
.insieme dei nodi decisionali	X	$T\setminus Z:=Z^c$

.insieme dei nodi (o stati) iniziali	W	$\{t \in T: (\text{non esiste } x \in T: x < t)\}$
.insieme dei predecessori di t	$P(t)$	$\{x \in T: x < t\}$
.predecessore immediato di t	$p_1(t)$	$\max P(t)$
.n-esimo predecessore di t	$p_n(t)$	$p_1(p_{n-1}(t)), t: p_{n-1}(t) \in T \setminus W$ $p_0(t) := t,\ t \in T$
.insieme dei successori immediati di x	$S(x)$	$S(x) := p_1^{-1}(x),\ x \in X$
.insieme dei successori terminali di x	$Z(x)$	$\{z \in Z: x < z\},\ x \in X$
.numero dei predecessori di t	$l(t)$	$l(t): p_{l(t)}(t) \in W$
.complemento di Y in T	Y^c	$T \setminus Y$, con Y incluso in T
.predecessori di x in Y	Y_x	$Y \cap P(x)$
.successore immediato di x in P(z)u{t}	$s(x,t)$	$\{s(x,t)\} = S(x) \cap (P(t) \cup \{t\})$

2) Sia n il numero dei giocatori ($n < \#(T \setminus Z)$), allora l'insieme dei giocatori è $I = \{1,2,3...(n-1),n\}$. Le regole del gioco che stabiliscono chi deve giocare in ogni possibile circostanza sono rappresentate da una applicazione che assegna a ogni nodo decisionale un giocatore. L'applicazione dei turni di gioco è $i: X \to I$. L'insieme dei nodi decisionali per i quali tocca scegliere a un generico giocatore j si indica con X_j, cioè $X_j := i^{-1}(j)$. L'insieme complementare in X, cioè quello dei nodi in cui tocca scegliere a qualche altro

giocatore, si indica con X^j, cioè $X^j:=X\setminus X_j$ (si userà sempre la lettera j in indice per riferirsi al giocatore j e in apice per riferirsi a tutti i giocatori diversi da j).

3) In un gioco è di fondamentale importanza che le regole stabiliscano implicitamente o esplicitamente cosa possono sapere i giocatori, prima di compiere le loro scelte, relativamente alle scelte precedenti e agli stati di natura (si tengano presenti gli esempi della "briscola" e del "pari o dispari"). Lo stato d'informazione di un giocatore che (forse senza saperlo) si trova in un nodo x è matematicamente rappresentato dall'insieme dei nodi che il giocatore $i(x)$ non sa distinguere da x; tale **insieme d'informazione** si indica con $H(x)$. Più $H(x)$ è piccolo, più $i(x)$ è informato; il massimo dell'informazione di $i(x)$ lo si ha quando $\{x\}=H(x)$. Il complesso delle regole che stabiliscono quali informazioni sono permesse per ogni circostanza x e per il giocatore $i(x)$ è rappresentato dalla struttura dell'informazione. La **struttura dell'informazione** è una corrispondenza H da X in X, ovvero una applicazione da X in 2^X: $H:X \Rightarrow X$.

H ripartisce l'insieme X in modo coerente con la funzione dei turni di gioco. Ciò significa che ogni nodo decisionale appartiene a a uno e un solo insieme d'informazione e che due nodi x e x' possono appartenere allo stesso insieme d'informazione solo se $i(x)=i(x')$. Formalmente:

$$\begin{array}{ll} & \text{per ogni } x \quad x \in H(x) \\ (3.0) & \text{per ogni } (x,x') \; H(x)=H(x') \text{ oppure } H(x)\cap H(x')=\emptyset, \\ & \text{se } H(x)=H(x') \text{ allora } i(x)=i(x'). \end{array}$$

Gli insiemi d'informazione sono normalmente indicati con la lettera h. La **famiglia di tutti gli insiemi d'informazione** è $H(X)$, la **famiglia di tutti gli insiemi d'informazione del giocatore j** è $H(X_j)$ e naturalmente $H(X)\setminus H(X_j)=H(X^j)$ (qui si usa la normale notazione matematica: data una applicazione $f:X\to Y$, se B è un sottoinsieme di X, allora $f(B)$ è l'insieme delle immagini degli elementi di B tramite f: $f(B):=\cup_{x\in B}f(x)$; quindi se $f(x)$ è un insieme, $f(B)$ è una famiglia di insiemi; quando si verrà meno a questa regola definitoria, lo si dirà espressamente). Se ~~sé~~ $x\in h$ e $x'\in h$ allora $i(x)=i(x')$; è quindi sensato indicare con $i(h)$ il giocatore che decide in base all'informazione h, anche se così facendo non si rispettano le usuali convenzioni (poichè h è un insieme, i(h) dovrebbe essere un insieme, anche se con un unico elemento, spesso le confusioni di tipo logico tra un insieme e il suo unico elemento sono innocue, come in questo caso). Si pone quindi $i(h):=i(x)$, se $x \in h$. Inoltre è opportuno indicare l'insieme dei successori immediati degli $x \in h$ con $S(h):=U_{x \in h}S(x)$, con $h \in H(X)$.

4) Ad ogni arco corrisponde il nodo in cui l'arco incide, cioè se $x=p_1(t)$ allora $x \to t$ è un arco cui corrisponde il nodo t. La relazione tra nodi non iniziali ($t \in W^c$) e archi incidenti è biunivoca, perchè $(T,<)$ è una arborescenza. Poichè ogni arco rappresenta una azione compiuta in circostanze oggettive date, è possbile "denominare" le azioni mediante un insieme di "etichette" A e una regola di denominazione che assegna a ogni nodo $t \in W_c$ una azione (o meglio il nome di una azione) $a \in A$. A è l'insieme delle azioni. La regola di denominazione è una applicazione delle azioni $\alpha: W^c \to A$. E' chiaro che α deve rispettare alcune proprietà. Per esempio α non può applicare a due nodi t e t' successori immediati di x e x' la stessa azione, se i(x) è diverso da i(x'); si tratta infatti di due azioni diverse pertinenti per giocatori diversi. Inoltre α deve applicare azioni diverse ad ogni arco che si dirama dallo stesso nodo decisionale e poichè i(h) non può distinguere tra due nodi $x \in h$ e $x' \in h$, ci devono essere due archi $x \to t$ e $x' \to t'$ a cui corrisponde la stessa azione (nella figura II ci sono due coppie di archi che corrispondono rispettivamente all'azione p e all'azione d). Formalmente si ha:

(3.1) se $x \in H(x')$, allora $\alpha(S(x))=\alpha(S(x'))$
se $p_1(t)$ non $\in H(p_1(t'))$, allora $\alpha(t)$ è diverso da $\alpha(t')$

Dalla (3.1) segue che ha senso definire l'insieme A(h) delle azioni possibili in h (cioè quando si dispone dell'informazione h) come segue: $A(h):=U_{x \in h}\alpha(S(x))$.

Si aggiunge inoltre un'ipotesi in cui si asserisce sostanzialmente che non esistono "giocatori fantoccio", ovvero giocatori che si limitano a ricevere informazioni senza mai scegliere tra più azioni alternative:

(3.2) non esiste $j \in I$ tale che per ogni $x \in i^{-1}(j):=X_j$ esiste una sola $a \in \alpha(S(x))$;

Si è detto nel primo capitolo che non si sarebbero presi in considerazione limiti nella capacità di calcolo, deduzione e trattamento delle informazioni da parte degli agenti. Ciò implica che non ci siano limiti all'immagazzinamento delle informazioni, cioè che gli agenti siano dotati di una memoria perfetta: in ogni fase del gioco essi devono ricordare tutte le azioni precedentemente scelte e devono conservare tutte le informazioni precedentemente ricevute. Spesso si cerca di modellare dei giochi di squadra come il "bridge" o lo "scopone scientifico", come giochi con memoria imperfetta in cui una squadra corrisponde a un unico giocatore. La memoria imperfetta deriva allora dalla limitata possibilità di comunicazione tra i giocatori. In questa sede invece, coerentemente con l'euristica positiva dell'individualismo metodologico, si identificano i giocatori con gli individui e quindi la memoria perfetta diventa una logica conseguenza della razionalità non limitata. Si assume perciò che:

se $x \in H(x')$, allora non $(x<x')$

(3.3) se $x,x',x'' \in i^{-1}(j), x<x'$ e $H(x')=H(x'')$, allora $P(x'') \cap H(x)=\{x^o\}$, e posto $x:=p_n(x')$ e $x^o:=p_m(x'')$, si ha $\alpha(p_{n-1}(x'))=\alpha(p_{m-1}(x''))$;

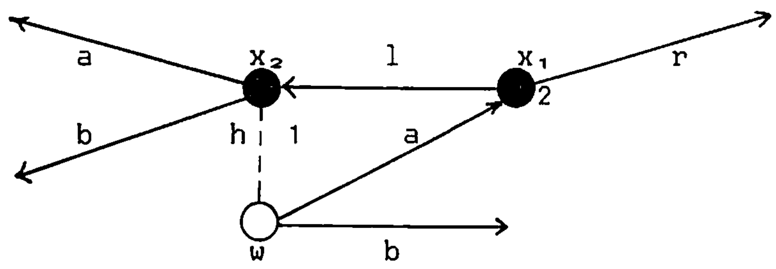
Nella figura III sono riportati due esempi di giochi a memoria imperfetta che violano la prima o la seconda condizione.

Si vedrà in seguito che l'ipotesi della memoria perfetta ha delle notevoli implicazioni.

5) Sia $P(Z)$ la famiglia delle distribuzioni di probabilità su Z, cioè la famiglia delle $p:Z\to[0,1]$ tali che $\Sigma_{z\in Z}p(z)=1$ (da un punto di vista geometrico si tratta del simplesso unitario dello spazio euclideo $R^{\#Z}$). Si assume che ogni giocatore j sia dotato di un sistema di preferenze "$\geq_j$", che soddisfa gli assiomi di Von Neumann Morgenstern. Esiste allora una applicazione $u:Z\to R^n$

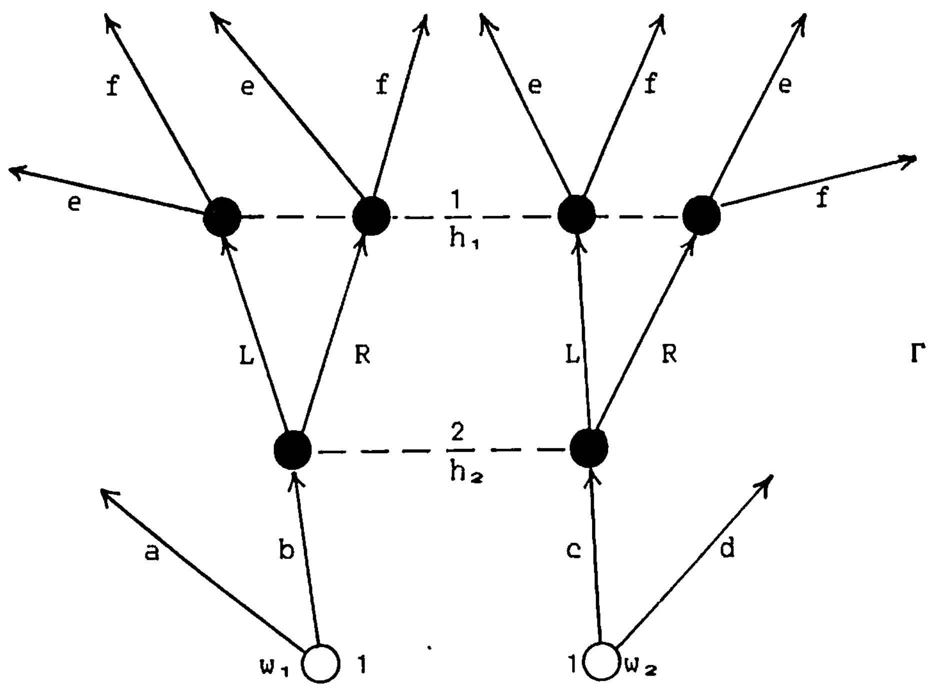
$$u(z)=(u_1(z).......u_n(z)) ;$$

Due giochi con memoria imperfetta.



Γ_1

Il giocatore 1 in Γ_1 è caratterizzato da una memoria imperfetta, perchè in h non sa se ha già scelto l'azione a.



Γ_2

Il giocatore 1 in Γ_2 è caratterizzato da una memoria imperfetta, perchè in h_1 non ricorda più qual è lo stato di natura.

figura III

tale che se p e p' sono due distribuzioni in Z, per ogni $j \in I$

$$\Sigma_{z \in Z} u_j(z)p(z) \geq \Sigma_{z \in Z} u_j(z)p'(z) \text{ se e solo se } p \geq_j p',$$

è quindi possibile rappresentare il comportamento razionale degli agenti mediante la massimizzazione dell'utilità attesa (cfr. Von Neumann, Morgenstern [1980], pp 603 e segg) ogni u così definita può essere considerata la **funzione di payoff** del gioco.

6) Sull'insieme degli stati di natura è definita una distribuzione di probabilità "oggettive"

$$r: W \to [0,1], \Sigma_{w \in W} r(w) = 1.$$

Questa distribuzione di probabilità è da considerarsi oggettiva nel senso seguente. Esiste un meccanismo che genera in modo aleatorio gli stati di natura: subordinatamente alla conoscenza di tale meccanismo ogni giocatore e ogni possibile osservatore esterno valutano le probabilità dei singoli stati di natura in modo identico. Ad esempio nei giochi di carte esiste un modo corretto di mescolare il mazzo, generando una particolare permutazione. Si assume allora che, subordinatamente all'ipotesi che le carte siano state mescolate in modo corretto, ognuno assegni a ogni particolare permutazione la medesima probabilità che assegnano gli altri (ad esempio, se K è il numero delle carte nel mazzo, è uso comune assegnare a ogni permutazione la probabilità 1/(K!)). In altre parole le probabilità assegnate dalla distribuzione r sono "probabilità pubbliche" (De Finetti [1980]), che di fatto sono il frutto di una valutazione intersoggettiva. Senza questa interpretazione sarebbe privo di senso inserire una distribuzione di probabilità nella descrizione di un gioco. Tale descrizione infatti deve essere suscettibile di assumere valore di verità o falsità, mentre le proposizioni probabilistiche non sono di per sé stesse verofunzionali.

Si noti che è ammessa la possibilità che qualche stato di natura abbia una probabilità nulla (r mappa in [0,1] non in (0,1]). Se tutti i giocatori conoscessero la distribuzione r non ci sarebbe nessuna perdita di generalità ad escludere questa possibilità, perchè gli alberi che hanno per radice un w con $r(w)=0$ sono del tutto irrilevanti per la determinazione del comportamento dei giocatori. Ma come si sottolineerà in seguito, non si assume che vi sia completa informazione e quindi è possibile che qualche giocatore assegni una probabilità soggettiva positiva a un w con $r(w)=0$, cioè a uno stato di natura impossibile. In questo modo è anche possibile rappresentare delle false conoscenze degli agenti relativamente a certe regole di un gioco dato, nell'ambito di un altro gioco in cui le false regole valgono in uno stato di natura w con $r(w)=0$, ma ritenuto possibile o addirittura certo da uno o più agenti (questo procedimento è analogo a quello di Harsanyi [1967-68], ma egli considera nota la distribuzione r relativa al "metagioco").

Definizione 3.1. Un gioco in forma estesa con memoria perfetta è una struttura

$$\Gamma := (T,<;I,i;H;A,\alpha;u;r)$$

i cui elementi sono definiti ai punti 1)-6).

Poichè la memoria perfetta è un'ipotesi di base che non verrà mai abbandonata, si userà più semplicemente l'espressione "gioco in forma estesa".

Segue un'altra tabella riassuntiva sulla notazione, relativa questa volta a tutti gli elementi del gioco diversi dalla arborescenza.

nome	notazione	definizione
.insieme dei giocatori	I	$I=\{1,2,...n\}$
.applicazione dei turni di gioco	i	$i:Z^c \to I$
.insieme dei nodi decisionali di j	X_j	$X_j:=i^{-1}(j)$
.insieme dei nodi deci-		

sionali dei giocatori diversi da j	X^j	$X^j:=X\setminus X_j$
.Insieme d'informazione	h	$x\in h$, $x'\in h$ implica $H(x)=H(x')$
.struttura della informazione	H	$H:X=>X$ tale che: .$H(x)=H(x')$ implica $i(x)=i(x')$ .per ogni x $x\in H(x)$ .per ogni (x,x') $H(x)=H(x')$ oppure $H(x)\cap H(x')=\emptyset$
.struttura della informazione di j		$H_j:X_j=>X_j$, $H_j(x)=H(x)$, $x\in X_j$
.famiglia di tutti gli insiemi d'informazione	$H(X)$	$H(X):=\cup_{x\in X}H(x)$
.famiglia degli insiemi d'informazione di j	$H(X_j)$	$H(X_j):=\bigcup_{x\in X_j} H(x)$
.famiglia degli insiemi d'informazione dei giocatori diversi da j	$H(X^j)$	$H(X^j):=H(X)\setminus H(X_j)$
.giocatore che decide in base all'informazione h	$i(h)$	se $x\in h$, allora $i(h):=i(x)$
.insieme dei successori immediati di h	$S(h)$	$S(h):=\cup_{x\in h}S(x)$
.insieme delle azioni	A	$A:=\alpha(W^c)$
.applicazione delle azioni	α	$\alpha:W^c\to A$, tale che: .α biunivoca su $S(x)$, $x\in X$ .se $h\cap h'=\emptyset$, allora $\alpha(S(h))\cap\alpha(S(h'))=\emptyset$
.insieme delle azioni possibili data l'inf. h	$A(h)$	$A(h):=\cup_{x\in h}\alpha(S(x)):=\alpha(S(h))$
.funzione di payoff	u	$u:Z\to R^n$

.distribuzione degli stati di natura	r	$r:W\to[0,1]$, $\Sigma_{w\in W}r(w)=1$
.insieme delle distrib. di probabilità dei risultati finali	P(Z)	$P(Z)=\{p:Z\to[0,1],\Sigma_{z\in Z}p(z)=1\}$

A questo punto è necessario chiarire la questione delle informazioni dei giocatori. Si è detto nel capitolo 2° (paragrafi 2.2 e 2.4) che l'ipotesi della completa informazione riguarda le informazioni a priori, generali ed astratte che hanno i giocatori sulle regole del gioco, mentre l'ipotesi della perfetta informazione riguarda le conoscenze particolari di tempo e di luogo che i giocatori possono acquisire durante il gioco.

Si dice che il gioco è a **informazione completa** se ogni giocatore conosce a priori la forma estesa del gioco; si dice che il gioco è a informazione perfetta se ogni giocatore conosce ad ogni suo turno tutte le mosse precedenti comprese le mosse casuali con cui la natura "sceglie" il nodo iniziale. La prima ipotesi è interpretativa, mentre la seconda è formale:

Definizione 3.2. Si dice che un gioco Γ è caratterizzato da un'**informazione perfetta** se per ogni nodo decisionale $x\in T\setminus Z:=Z^c$ si ha $H(x)=\{x\}$.

E' banale verificare che l'informazione perfetta implica la memoria perfetta, ma non viceversa (un gioco banale con memoria perfetta e informazione imperfetta è quello del "pari o dispari" nella figura II).

Poichè la discussione e la formalizzazione delle teorie dei giocatori è rinviata al prossimo capitolo, si è qui costretti a rimanere ad un livello interpretativo per quanto riguarda le ipotesi sulle informazioni a priori dei giocatori. Comunque si potrà verificare che la definizione delle congetture potrebbe risultare in certi casi poco sensata, se si assumesse che vi sia completa informazione.

D'altra parte questa ipotesi sembra essere inutilmente restrittiva dal punto di vista qui adottato. L'importante è che ogni giocatore in base alle sue congetture possa ottenere tutte le distribuzioni di probabilità su Z condizionate dalle sue azioni e che sia in grado di scegliere il piano che produce la distribuzione di probabilità preferita. Si assume perciò che ogni giocatore conosca l'arborescenza $(T,<)$ del gioco Γ e tutti gli elementi di Γ che lo riguardano personalmente.

> **Ipotesi:** ogni giocatore $j\in I$ è dotato di una **completa informazione personale**, cioè conosce a priori l'arborescenza $(T,<)$ del gioco Γ, l'insieme dei suoi nodi decisionali X_j, la sua personale struttura dell'informazione $H(X_j)$, le azioni a lui disponibili $\alpha(S(X_j))$ unitamente alla restrizione della applicazione delle azioni α su $S(X_j):=\cup_{x\in X_j}S(x)$ ($S(X_j)$ è l'insieme dei successori immediati dei suoi nodi decisionali) e soprattutto conosce la propria funzione di utilità $u_j:Z\to R$ (volendo essere più precisi si dovrebbe dire che conosce il suo preordinamento di preferenze $\gtrsim_j$ su $P(Z)$).

Per quanto riguarda le informazioni acquisite durante il gioco, si ribadisce che l'unica ipotesi di base è quella della memoria perfetta.

3.2. Teorie e congetture dei giocatori: definizione delle congetture.

Ogni giocatore ha delle opinioni su tutto ciò che non conosce. Queste opinioni possono essere soggettivamente certe o incerte e riguarderanno tanto le regole del gioco non note, quanto il comportamento altrui. Su tutto ciò che non gli è noto o su cui non ha opinioni certe, ogni agente dà delle valutazioni probabilistiche soggettive. In un certo senso queste valutazioni fanno parte anch'esse delle conoscenze soggettive dell'agente, perchè comunque riflettono le sue opinioni. Questi quattro tipi di conoscenze, certe o incerte sulle regole del gioco, certe o incerte sul comportamento altrui, costituiscono una struttura formale coerente: la teoria dell'agente. Le teorie degli agenti saranno prese in considerazione nel prossimo capitolo. Ciò che qui interessa è che una teoria θ_j di un generico agente j permette di assegnare una distribuzione di probabilità sull'insieme dei risultati Z ad ogni strategia s_j di j. Da questa distribuzione di probabilità è possibile derivare la probabilità di un evento qualsiasi del gioco subordinatamente al verificarsi di ogni evento del gioco teoricamente possibile per j. In particolare se il nodo $x \in X^j$ rappresenta una storia parziale teoricamente possibile secondo j e se t è un successore immediato di x ($t \in S(x)$), allora dalla teoria si può derivare la probabilità che t segua x, dato x. Se le opinioni di j in merito a ciò sono certe, egli assegnerà una probabilità condizionata pari a 0 o 1, altrimenti una probabilità condizionata compresa tra i due valori. In altre parole j è in grado di assegnare una probabilità condizionata a ogni arco x->t non corrispondente ad una sua azione, purchè egli ritenga x possibile. Si indichi con $c_j(t|x)$ questa probabilità condizionata (il simbolo "|" verrà sempre usato per indicare che ciò che sta alla sua destra è da considerarsi dato) e si indichi con $Pr\{.|s_j;\theta_j\}$ la distribuzione di probabilità su Z subordinata a s_j, generata dalla teoria θ_j. Se x è ritenuto possibile da j e quindi ha una probabilità soggettiva positiva, allora

$$c_j(t|x) = \frac{Pr\{Z(t)|s_j;\theta_j\}}{Pr\{Z(x)|s_j;\theta_j\}} = \frac{\Sigma_{z \in Z(t)} Pr\{z|s_j;\theta_j\}}{\Sigma_{z \in Z(x)} Pr\{z|s_j;\theta_j\}}$$

E' chiaro che questo calcolo ha senso se la strategia s_j non elimina a priori la possibilità di giungere al nodo x, ma a parte ciò la probabilità $c_j(t|x)$ è semplicemente un sottoprodotto della teoria θ_j.

Quando si ha un nodo iniziale w la sua probabilità soggettiva dipende solamente dalle opinioni di j sul meccanismo aleatorio che genera gli stati di natura; se queste opinioni sono certe j calcolerà la probabilità di w semplicemente in base alla distribuzione che caratterizza il meccanismo in cui egli crede (o che gli è noto), altrimenti dovrà usare anche una distribuzione di probabilità sui meccanismi aleatori e la regola delle probabilità composte. Comunque sarà in grado di ricavare una probabilità soggettiva che indichiamo con $r_j(w)$. Per quanto riguarda le probabilità condizionate su quegli archi che j non ritiene possibile raggiungere, è sempre possibile che j abbia delle opinioni, anche se tali opinioni sono del tutto irrilevanti ai fini delle sue scelte. E' perciò innocuo assumere che j assegni delle probabilità condizionate anche a questi archi.

E' a questo complesso di probabilità condizionate e degli stati di natura che si da il nome di "congettura dell' agente j". La congettura risulta essere una forma "quasi ridotta" della teoria: "ridotta" perchè è derivata dalla teoria ed è strutturalmente più semplice, ma non è in grado di evidenziare le ragioni che inducono un agente a dare certe valutazioni probabilistiche; "quasi" perchè la vera forma ridotta è la pura e semplice connessione azioni-conseguenze, data dalla applicazione che a ogni strategia assegna una distribuzione in $P(Z)$. Si preferisce però concentrarsi sulle congetture, perchè sono rappresentabili in modo abbastanza semplice da un punto di vista matematico, e al tempo stesso riflettono almeno in parte le opinioni di j sugli stati di natura e sul comportamento altrui.

Definizione 3.3. Si definisce congettura di j una coppia $ç_j=(r_j,c_j)$ di applicazioni della forma:

$$\begin{array}{ll} & c_j:W^c x X^j)\to[0,1],\ \Sigma_{t\in S(x)}c_j(t|x)=1, \\ (3.4) & c_j(t|x)=o \text{ se } t\in W^c\backslash S(x) \\ & r_j:W\to[0,1],\ \ \Sigma_{x\in W}r_j(x)=1 \end{array}$$

l'insieme delle congetture così definite è indicato da $Ç_j$.

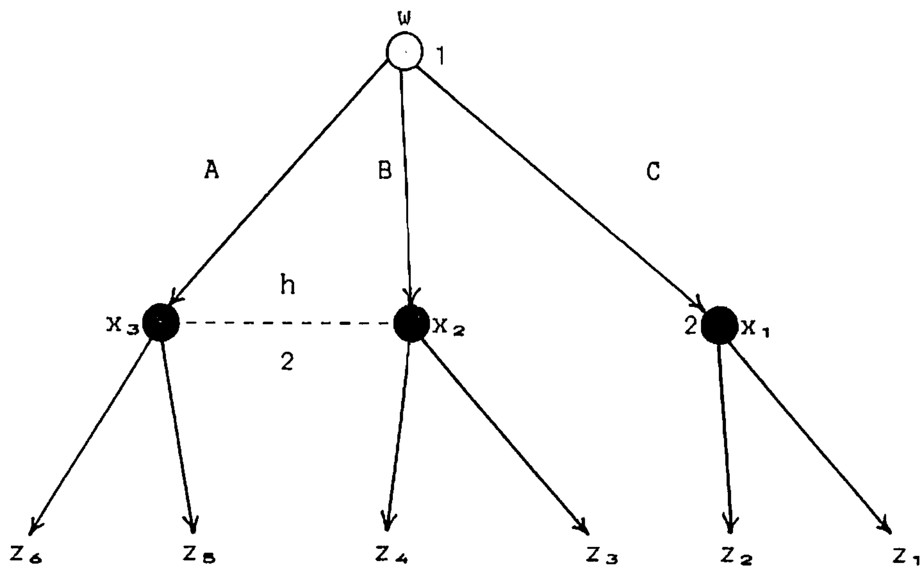
Da quanto detto sopra il significato della (3.4) dovrebbe essere chiaro: per ogni nodo del gioco, in cui non gli tocca scegliere il giocatore j assegna una distribuzione di probabilità sull'insieme dei successori immediati; tale probabilità va interpretata come una probabilità (soggettiva) condizionata: ciò spiega l'uso della particolare notazione "$(t|x)$". La lettera "c" è riservata a ciò che riguarda le congetture sul comportamento altrui, mentre la lettera "ç" riguarda la congettura nel suo complesso, comprese le opinioni sugli stati di natura.

Disporre di una congettura è sufficiente per attribuire a ogni linea d'azione (strategia) una distribuzione di probabilità sulle conseguenze possibili. Di fatto il concetto è analogo a quello di "teoria di un agente" secondo Hahn, ma va rilevato che esistono anche delle differenze la cui discussione è già stata anticipata nel paragrafo 1.2.

Si identifichi per comodità il tempo con il numero di archi necessari per raggiungere un certo nodo a partire dal suo predecessore iniziale (cioè il nodo t viene datato con $l(t)$). Hahn richiede che l'agente in base alla sua teoria valuti la probabilità di un qualsiasi evento x con data $l(x)$ condizionata da un qualsiasi messaggio h con data $l(h) \leq l(t)$ (si suppone che l'espressione $l(h)$ abbia significato; certamente lo avrebbe nell'ambito di un gioco che cerchi di rappresentare un'economia sequenziale). Ma in base a una congettura non sempre è possibile calcolare tale probabilità condizionata, poichè a tal fine deve verificarsi almeno una delle due seguenti condizioni: a) che h rapresenti una "storia oggettiva", cioè sia costituito da un unico nodo, oppure b) che h sia ritenuto possibile da j. E' possibilissimo che per qualche messaggio/ informazione h ciò non si verifichi. Per convincersene basta dare un'occhiata alla figura IV. Ma si è già mostrato nel paragrafo 1.2 che un agente non ha nessun bisogno di valutare delle probabilità subordinate ad eventi che egli ritiene impossibili, perchè prima che tali eventi si verifichino queste valutazioni sono irrilevanti per le sue decisioni e quando si sono verificati l'agente è comunque costretto a rivedere radicalmente le sue opinioni (cioè apprende) e in base alle nuove opinioni fa tutte le valutazioni probabilistiche necessarie.

La precedente discussione ha messo in evidenza l'opportunità di dividere gli insiemi d'informazione di j (cioè tutti i messaggi che j oggettivamente potrebbe ricevere) in due classi, relativamente ad ogni congettura assegnata: da una parte le informazioni ritenute possibili da j, dall'altra quelle che j ritiene impossibili. Se j riceve un'informazione secondo la quale si è verificato un evento che j riteneva impossibile, la sua congettura (e la teoria da cui la congettura è stata dedotta) risulta falsificata. Dunque la seconda classe cui si è accennato sopra rappresenta l'insieme dei

Non sempre una congettura è in grado di generare probabilità subordinate ad una qualsiasi informazione.



Se $c_2(x_1|w)=1$, allora 2 ritiene h impossibile. Egli non è perciò in grado di valutare le probabilità dei nodi $z_3 \ldots z_6$ subordinatamente ad h, basandosi su c_2. Infatti sarebbe a tal fine necessario poter assegnare una probabilità condizionata $\mu(.)$ ai nodi x_3 e x_2, in modo che $\mu(x_3)+\mu(x_2)=1$; ma c_2 non fornisce gli elementi necessari per calcolare tale probabilità. Ciò però è irrilevante: se 2 riceve l'informazione h, la sua congettura è falsificata ed egli ne adotta una coerente con h.

figura IV

falsificatori potenziali, ovvero il contenuto empirico della congettura (cfr; Popper [1970], pp 80-82) durante lo svolgimento del gioco. Perciò se $ç_j$ è la congettura assegnata, tale classe sarà indicata con la notazione "Ref $ç_j$" (dall'inglese "refutation"). Una definizione formale sarà fornita nel prossimo paragrafo, ma si può già anticipare qualcosa: $h \in \text{Ref } ç_j$ se per ogni percorso che porta in h $ç_j$ assegna una probabilità nulla al nodo iniziale o ad almeno un arco. La classe degli h possibili secondo $ç_j$ è ovviamente la complementare di Ref $ç_j$ in $H(X_j)$. A tale classe ci si riferisce con la notazione "Coe $ç_j$" , cioè la classe delle informazioni coerenti con la congettura $ç_j$.

3.3. Strategie pure, miste e comportamentali.

Per ottenere una distribuzine di probabilità sullo spazio delle conseguenze Z occorre una strategia. Si è già detto che la strategia è un piano che prescrive le azioni da attuare in base alle informazioni. Un agente j non ha nessun bisogno di specificare nel suo piano l'azione da scegliere in seguito ad un evento $h \in H(X_j)$, che è escluso da una precedente azione di j prescritta dal piano stesso. Ciò infatti avrebbe senso solo se j ritenesse di poter attuare certe alternative per sbaglio, ma in questo caso non si tratterebbe più di azioni, bensì di obbiettivi intermedi e la descrizione del gioco dovrebbe tenerne conto. Tuttavia, purchè queste parti del piano risultino irrilevanti tanto per un osservatore esterno, quanto per j, è un'operazione innocua definire le strategie in modo che tengano conto di qualsiasi informazione, comprese quelle impossibili perchè escluse da azioni precedenti. La situazione è del tutto analoga a quella che si è presentata per la definizione delle congetture. In entrambi i casi la specificazione di particolari irrilevanti, purchè risulti innocua, è un'operazione formalmente opportuna, perchè semplifica la definizione matematica e rende le strategie (e le congetture) oggetti matematici tra loro omogenei.

Definizione 3.4. Si definisce strategia pura di j una applicazione s_j che ad ogni insieme d'informazione $h \in H(X_j)$ assegna una azione possibile $a \in A(h)$:

(3.5) $s_j : H(X_j) \to A$, $s_j(h) \in A(h)$.

L'insieme delle strategie pure così definite si indica con S_j.

Si assume che ogni giocatore possa scegliere, oltre che tra strategie alternative (all'inizio del gioco) e tra azioni alternative (durante il gioco), anche tra distribuzioni di probabilità su strategie e azioni. Si consideri il caso delle strategie. Si può immaginare che ogni giocatore disponga di un'urna e che possa produrre senza costi delle palline tra loro identiche nel numero che desidera. Può poi contrassegnare queste palline con un'etichetta corrispondente a qualche strategia pura, metterle nell'urna e poi estrarne una con un procedimento casuale, come nel gioco del lotto. Ad esempio un giocatore che disponga di due strategie pure A e B e voglia scegliere una distribuzione di probabilità $p(A)=1/3$, $p(B)=2/3$, dovrebbe prendere un numero di palline N divisibile per tre, applicare su N/3 palline l'etichetta A e su 2N/3 palline l'etichetta B. Con questo procedimento le distribuzioni disponibili sono limitate ai numeri razionali, il giocatore in questione non potrebbe scegliere una distribuzione con $p(A)=\sqrt{2}/2$. Ma si tratta solo di un espediente per rendere concreta l'immagine della scelta di una distribuzione di probabilità. L'essenziale è la scelta di un "meccanismo aleatorio" a cui ogni giocatore e ogni osservatore esterno di fatto assegnerebbero la stessa distribuzione di probabilità, se solo lo conoscessero (cfr. Luce, Raiffa [1957], p 74). Subordinatamente alla scelta di tale meccanismo le probabilità assegnate sono "pubbliche", come nel caso degli stati di natura. Per "strategia mista" di j si intende una distribuzione di probabilità sull'insieme delle strategie pure, S_j. Poichè questa è l'unica scelta casuale che può essere definita in base agli elementi contenuti nella forma normale di un gioco (cfr. paragrafo 2.2) si userà anche l'espressione "strategia mista in forma normale". Per "azione mista in h" si intende una distribuzione di probabilità sull'insieme A(h). In questa dissertazione si farà prevalentemente uso di un altra nozione di scelta casuale: la "strategia mista comportamentale", cioè un piano che per ogni informazione h presrive la scelta di una azione mista in h.

Definizione 3.5. Si definisce **azione mista in h** la seguente distribuzione di probabilità:

$$\sigma^h: A(h) \to [0,1],\ \Sigma_{a\in A(h)}\sigma^h(a)=1.$$

Si definisce **strategia mista comportamentale** di j ($j \in I$) una applicazione che ad ogni $h \in H(X_j)$ assegna una azione mista in h, o equivalentemente l'applicazione

$$(3.6)\quad \sigma_j: \alpha[S(X_j)] \to [0,1],\ \Sigma_{a\in A(h)}\sigma_j(a)=1,\ h\in H(X_j);$$

l'insieme delle σ_j così definite è indicato da Σ_j. Si definisce **strategia mista in forma normale** di j la seguente distribuzione di probabilità:

$$(3.6')\quad \sigma_j^N: S_j \to [0,1],\ \sum_{s\in S_j} \sigma_j^N(s)=1;$$

L'insieme delle σ_j^N si indica con Σ_j^N.

Una strategia mista (comportamentale o in forma normale) è detta **completamente mista** se ha per dominio l'intervallo semiaperto $(0,1]$. Gli insiemi delle strategie completamente miste sono indicati con Σ_j^o e Σ_j^{No} rispettivamente.

Si è visto che nel caso delle congetture è opportuno distinguere tra informazioni falsificanti e non falsificanti. La situazione è analoga per quanto riguarda le strategie: bisogna distinguere tra informazioni rilevanti o irrilevanti rispetto a una strategia data. Quali siano le informazioni irrilevanti si può facilmente intuire; si tratta di quelle corrispondenti ad eventi esclusi a priori da precedenti azioni prescritte dalla strategia. Tali eventi sono dati da un insieme di nodi/storie che sono tutti resi impossibili dalle scelte prescritte dalla strategia. La definizione dei nodi possibili e degli insiemi d'informazione rilevanti, permette di mostrare come si calcola la probabilità di un risultato (nodo finale) z per una congettura e una strategia pura date. Si passerà poi al calcolo della probabilità di z quando è data una strategia mista comportamentale o in forma normale. Infine sarà possibile fornire una semplice definizione degli insiemi d'informazione rilevanti rispetto ad una strategia mista e di quelli falsificanti rispetto ad una congettura.

Definizione 3.6. Un nodo $t^o \epsilon T$ si dice possibile rispetto a s_j se per ogni $x \epsilon (X_j)_{t^o}$ si ha

$$s_j[H(x)]=\alpha[s(x,t^o)], \text{ se } x<t^o,$$

cioè se tutti gli archi che portano in t^o e corrispondono ad una azione di j sono selezionati dalla strategia s_j. L'insieme dei nodi possibili rispetto a s_j si indica con $Poss(s_j)$.

Un insieme d'informazione di j $h \epsilon H(X_j)$ si dice rilevante per s_j se esiste un $x \epsilon h$ possibile rispetto a s_j, cioè se $x \epsilon Poss(s_j) \cap h$. La famiglia degli insiemi d'informazione rilevanti per s_j si indica con $Rel(s_j)$ (cfr. Kuhn [1953], p 201).

Per calcolare la probabilità di un risultato z, date s_j e c_j si procede nel modo seguente: se z è impossibile rispetto a s_j, allora la probabilità è 0; se z è possibile rispetto a s_j, allora si fa il prodotto tra le probabilità soggettive relative al predecessore iniziale di z $(p_{1(z)}(z))$ e a tutti gli archi corrispondenti ad azioni altrui che portano in z.

$$\Pr(z\,|\,\varsigma_j,s_j):= 0, \text{ se } z \epsilon Z \backslash Poss(s_j)$$

(3.7)

$$\Pr(z\,|\,\varsigma_j,s_j):=r_j(p_{1(z)}(z)) \prod_{x \epsilon X^j_z} c_j(s(x,z)), \text{ se } z \epsilon Z \cap Poss(s_j)$$

Per calcolare la probabilità di z, date ς_j e σ_j (σ_j è una strategia comportamentale), basta moltiplicare la seconda espressione per il prodotto delle probabilità assegnate da σ_j a ogni arco che porta in z e corrisponde a una azione di j:

$$\text{(3.8)} \quad \Pr(z\,|\,\varsigma_j,\sigma_j):=r_j(p_{1(z)}(z)) \prod_{x \epsilon X^j_z} c_j(s(x,z)) \prod_{t \epsilon S(X_j)_z} \sigma_j(\alpha(t))$$

Per calcolare la probabilità di z, date ς_j e σ_j^N (σ_j^N è una strategia mista in forma normale), basta fare la media aritmetica delle (3.7) ponderata con le probabilità delle strategie pure date da σ_j^N:

$$(3.9)\ \Pr(z\,|\,\varsigma_j,\sigma_j^N):=\sum_{s\in S_j}\sigma_j^N(s)\Pr(z\,|\,\varsigma_j,s)$$

A questo punto è possibile definire in modo semplice gli insiemi d'informazione rilevanti per una strategia mista e quelli falsificanti per un certa congettura. I primi sono quelli che ricevono una probabilità positiva per qualche congettura, i secondi sono quelli che ricevono una probabilità nulla per qualche strategia rispetto alla quale sono rilevanti.

Definizione 3.7. Sia σ una strategia mista comportamentale o in forma normale di j. Un insieme d'informazione di j $h\in H(X_j)$ si dice **rilevante** per σ, se esiste una congettura $\varsigma_j\in Ç_j$ per la quale

$$\Pr(Z(h)\,|\,\varsigma_j,\sigma):=\Sigma_{z\in Z(h)}\Pr(z\,|\,\varsigma_j,\sigma)>0.$$

Si dice che $h\in H(X_j)$ è un **falsificatore potenziale** di ς_j se esiste una strategia pura $s_j\in S_j$ tale che

$$h\in Rel(s_j)\ \text{e}\ \Pr(Z(h)\,|\,\varsigma_j,s_j):=\Sigma_{z\in Z(h)}\Pr(z\,|\,\varsigma_j,s_j)=0$$

La famiglia degli h rilevanti per σ si indica con $Rel(\sigma)$, la famiglia dei falsificatori potenziali di ς_j si indica con $Ref(\varsigma_j)$ e inoltre si pone $Coe(\varsigma_j):=(H(X_j)\setminus Ref(\varsigma_j))$, essendo $Coe(\varsigma_j)$ la famiglia delle informazioni **compatibili** con ς_j.

$Ref(\varsigma_j)$ è anche chiamato **contenuto empirico** di ς_j **durante il gioco** (per la definizione di $Rel(\sigma)$ cfr. Kuhn [1953], p 203).

Le probabilità finora definite sono probabilità (condizionate) soggettive. Tali probabilità di norma sono diverse da quelle che userebbe un osservatore esterno, conoscendo il gioco Γ e tutte le strategie miste scelte dai giocatori all' inizio del gioco, e supponendo che tali strategie siano poi scrupolosamente osservate. Queste probabilità sono da considerarsi "oggettive" o meglio intersoggettive, perchè corrispondono alla distribuzione che chiunque assegnerebbe se gli fossero note tutte le informazioni rilevanti.

Si indichi con σ una combinazione di strategie miste comportamentali ($\sigma:=(\sigma_1,\sigma_2,\ldots\sigma_n)$). La probabilità oggettiva di z data σ è calcolata facendo il prodotto delle probablità assegnate da σ a ogni arco che porta in z (l'indice relativo ai giocatori è omesso per semplificare la notazione, visto che non sono possibili fraintendimenti) e moltiplicando per la probabilità dello stato di natura in cui z è possibile ($r(p_{1(z)}(z))$):

$$(3.10)\quad \Pr\{z|\sigma\}:=r(pl(z)(z))\prod_{m=1}^{m=l(z)} \sigma(\alpha(p_{m-1}(z))$$

Se è data una combinazione di strategie pure s la probabilità $\Pr\{z|s\}$ si ottiene dalla precedente formula, purchè si abbia $\sigma_{i(h)}(a)=1$, se $s_{i(h)}(h)=a$, per ogni h.

D'ora in poi si considereranno le strategie pure alla stregua di strategie miste corrispondenti ogni volta che ciò risulterà comodo, perchè si tratta di concetti del tutto equivalenti.

Sia σ^N una combinazione di strategie miste in forma normale e si ponga $Poss(s):=Z\cap Poss(s_1)\cap Poss(s_2)\ldots\cap Poss(s_n)$. La probabilità oggettiva di z data σ^N è

$$(3.11)\quad \Pr\{z|\sigma^N\}:=r(pl(z)(z))[\sum_{z\in Poss(s)} (\prod_{j=1}^{j=n} \sigma_j^N(s_j))];$$

cioè si sommano le probabilità assegnate da σ^N a tutte le combinazioni di strategie pure per le quali z è possibile e si moltiplica tale somma per la probabilità dello stato di natura in cui z è possibile.

Da un punto di vista intuitivo sembrerebbe che le probabilità ottenute usando le strategie miste comportamentali e in forma normale dovrebbero essere le stesse. Ma per verificare se questa intuizione è valida bisogna precisare come si ricava una strategia comportamentale da una strategia mista in forma normale.

Siano a e σ_j^N una azione in h e una strategia mista in forma normale di j ($a\in A(h)$, $h\in H(X_j)$); come si può ottenere la probabilità di scegliere l'azione a, subordinatamente all'ipotesi di poter fare tale scelta, cioè subordinatamente al raggiungimento di h? Bisogna sommare le probabilità, date da

σ_j^N, di tutte le strategie pure per le quali h è rilevante e che prescrivono di scegliere "a". Se la possibilità di scegliere a dipendesse solo da j, cioè se lo stato di natura in cui "a" è possibile avesse probabilità 1 e se tutti gli altri giocatori scegliessero delle strategie che portano in h, la somma suddetta rappresenterebbe la probabilità a priori di scegliere a. Bisogna allora dividere per la probabilità di arrivare in h, calcolata in base alle stesse ipotesi. Se h non appartiene a $Rel(\sigma_j^N)$ la divisione è priva di significato e bisogna procedere diversamente. Supponendo che h sia comunque raggiunto, la probabilità di scegliere "a" è data dalla somma delle probabilità di tutte le strategie che prescrivono di scegliere "a" in h. La strategia comportamentale ricavata da σ_j^N in questo modo è detta "comportamento" di σ_j^N (cfr. Kuhn [1953], p 210).

Definizione 3.8. Il comportamento σ di di una strategia mista in forma normale σ^N di un qualsiasi giocatore j (si omette l'indice relativo al giocatore) è una strategia comportamentale così definita: per ogni $a \in A(h)$ e ogni $h \in H(X_j)$

$$\sigma(a) := \Big[\sum_{h \in Rel(s),\, s(h)=a} \sigma^N(s)\Big] \Big/ \Big[\sum_{h \in Rel(s)} \sigma^N(s)\Big], \text{ se } h \in Rel(\sigma^N)$$

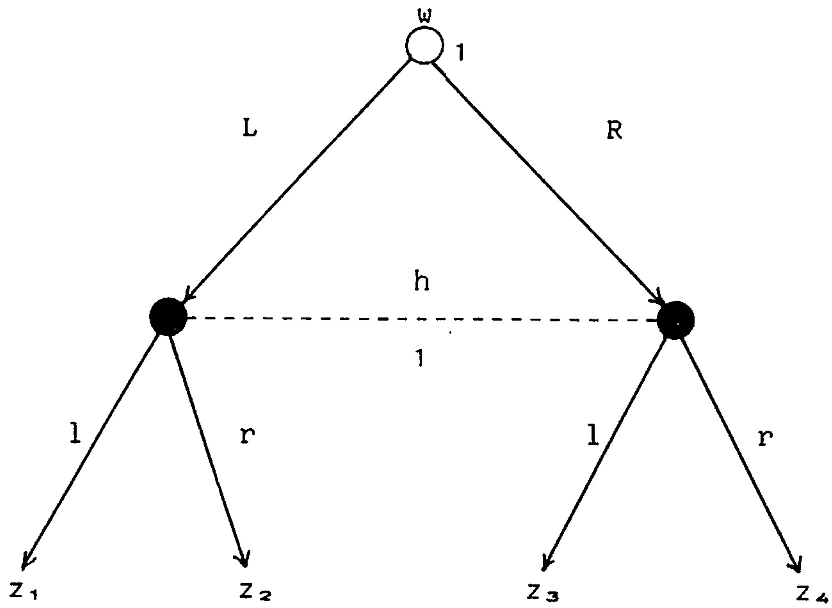
(3.12)

$$\sigma(a) := \sum_{s(h)=a} \sigma^N(s), \text{ se } h \in [H(X_j) \setminus Rel(\sigma^N)]$$

A questo punto si può verificare che l'intuizione sulla equivalenza tra i due tipi di strategie miste non è valida se non vi è memoria perfetta. Per mostrarlo è sufficiente il semplicissimo gioco con un giocatore rappresentato nella figura V. Questo gioco potrebbe rappresentare una situazione in cui due individui con interessi coincidenti ottengono determinati risultati agendo contemporaneamente. Nella figura sono calcolate le probabilità di un nodo finale ottenute con una particolare strategia mista in forma normale e con il suo comportamento: tali probabilità risultano diverse.

L'esempio dimostra che la memoria perfetta è una condizione necessaria affinchè si abbia l'equivalenza. Kuhn ha mostrato che è anche una condizione sufficiente. Il suo teorema riguarda solo le probabilità oggettive, ma il suo proce-

Nei giochi a memoria imperfetta le strategie miste in forma normale non equivalgono a quelle comportamentali.



$\sigma^N(L,l)=1/2 \qquad \sigma^N(R,l)=1/2$

$\sigma(l)=\sigma^N(L,l)/[\sigma^N(L,l)+\sigma^N(R,l)]=\sigma^N(L,l)=1/2$

$\sigma(L)=\sigma^N(L,l)+\sigma^N(L,r)=\sigma^N(L,l)=1/2$

$Pr\{z_1|\sigma^N\}=\sigma^N(L,l)=1/2$

$Pr\{z_1|\sigma\}=\sigma(L)\sigma(l)=1/4.$

figura V

dimento dimostrativo è ancora più facilmente applicabile alle probabilità soggettive. Si fornirà comunque una breve dimostrazione sulla equivalenza relativa alle probabilità soggettive.

Proposizione. Sia Γ un gioco in forma estesa con memoria perfetta e per ogni $j\epsilon I$ sia σ_j il comportamento di σ_j^N. Valgono allora le seguenti uguaglianze:

$$(3.13)\quad \sigma_j^N(s_j)= \prod_{h\epsilon H(X_j)} \sigma_j(s_j(h)),\ j\epsilon I,\ s_j\epsilon S_j$$

$$(3.14)\quad Pr\{z|\sigma\}=Pr\{z|\sigma^N\},\ z\epsilon Z$$

$$(3.15)\quad Pr\{z|\varsigma_j,\sigma_j\}=Pr\{z|\varsigma_j,\sigma_j^N\},\ j\epsilon I,\ z\epsilon Z,\ \varsigma_j\epsilon \Sigma_j.$$

Dimostrazione. La validità delle prime due uguaglianze è dimostrata da Kuhn (Kuhn [1953], Lemma 3, Theor.4). La terza uguaglianza è valida in virtù della seconda. Sia infatti $\Gamma'(j,r_j)$ un gioco con due giocatori j e k ricavato da Γ nel modo seguente: l'arborescenza è la stessa, $X_k=X^j$, la struttura dell'informazione di j rimane invariata, mentre k è caratterizzato da perfetta informazione, inoltre si ha $r'=r_j$. In $\Gamma'(j)$ l'applicazione delle azioni α' è biunivoca su $S(X_k)$ e, essendo $X_k=X^j$, ogni congettura $\varsigma_{j<}=(r_j,c_j)$ è tale che c_j definisce una strategia comportamentale di k. Inoltre $\Gamma'(j,r_j)$ è evidentemente un gioco con memoria perfetta. Quindi, essendo valida la (3.14) in $\Gamma'(j,r_j)$, è valida la (3.15) in Γ. ∎

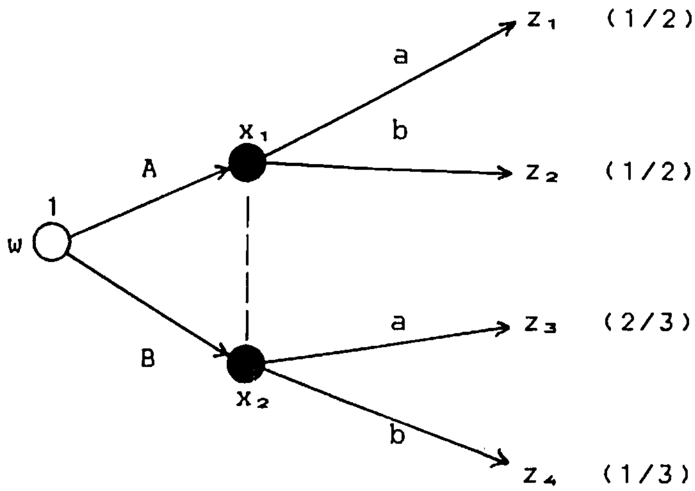
La proposizione di Kuhn permetterà di usare le strategie in forma normale o quelle comportamentali secondo l'opportunità, potendo contare sull'equivalenza dei due concetti.

Nella precedente dimostrazione ci si è basati sul fatto che una congettura sul comportamento altrui c_j equivaleva a una strategia mista dell'altro giocatore. Tale equivalenza era implicata dalla perfetta informazione dell'altro giocatore. Ma in generale non si può affermare che la congettura ς_j sia equivalente all'ipotesi che gli altri giocatori adottino determinate strategie miste. Infatti l'ipotesi di informazione personale completa non permette una simile interpretazione, perchè senza conoscere la struttura dell'informazione altrui non è possibile definire le strategie altrui. Inoltre, poichè la congettura ha per dominio un insieme di coppie di nodi e non un insieme di coppie del tipo (t,h), essa corrisponde piuttosto a una dipendenza funzionale delle strategie altrui dalla strategia pura di j e dallo stato di natura $w \epsilon W$. Ciò si può comprendere considerando il gioco rappresentato nella figura 1. Questo gioco ha la stessa struttura del "pari o dispari", si tratta cioè di un gioco a mosse simultanee o comunque di un gioco equivalente dal punto di vista dell'informazione dei giocatori. Ma il giocatore 1 può non essere a conoscenza del fatto che 2 non è in grado di sapere quale mossa egli abbia scelto, quindi la sua congettura può assegnare probabilità condizionate diverse a archi che corrispondono alla stessa azione di 2. Nel capitolo 4 si vedrà che una congettura di questo genere è da considerarsi incompatibile con la struttura dell'informazione, ma questa incompatibiltà non può essere esclusa se la struttura dell'informazione non è nota.

3.4. Postulato di razionalità: massimizzazione e apprendimento; considerazioni sull'apprendimento bayesiano.

Finchè non si fanno delle ipotesi sul comportamento dei giocatori, è impossibile dedurre dal modello delle previsioni sui risultati z, o almeno una distribuzione di probabilità sull'insieme Z di tali risultati. L'individualismo metodologico impone di adottare il principio di razionalità. Si è già visto che tale principio si può suddividere in due parti. Una parte riguarda la coerenza delle scelte con le preferenze, cioè la coerenza pragmatica. Ma tale coerenza può essere definita soltanto se esiste un (pre)ordinamento di preferenze sull'insieme delle alternative tra cui è possibile scegliere. Tale ordinamento può essere dedotto dalle preferenze di base, quelle relative ai risultati, solo se esiste una teoria o una congettura che connette le azioni alle conseguenze. Una strategia può essere pragmaticamente coerente rispetto a una data congettura, ma questa congettura potrebbe anche essere falsa. Per sottolineare questa possibile debolezza della scelta si

Non sempre la congettura di un giocatore corrisponde alle strategie miste degli altri giocatori.



Vicino ai nodi finali z_i è indicata la probabilità assegnata dalla congettura c_1 agli archi x_j->z_i.

La congettura di 1 equivale a una applicazione c_1:$\{A,B\}$->Σ_2, che assegna la strategia mista σ_2=((a,1/2),(b,1/2)) ad A e la strategia mista σ_2'=((a,2/3),(b,1/3)) a B.
Questa congettura è incompatibile con la struttura dell'informazione (2 non può distinguere tra x_1 e x_2), ma non necessariamente 1 la conosce.

figura 1

usano le espressioni "razionalità miope" e "strategia miopicamente razionale". La seconda parte del postulato di razionalità riguarda la coerenza sintattica e semantica. Durante lo svolgimento del gioco non si può distinguere tra le due perchè nell'ambito del modello la corrispondenza tra i "meri fatti" e le proposizioni fattuali, cioè le informazioni, è scontata, indiscutibile. I giocatori sono sintatticamente e semanticamente coerenti se, quando ricevono un'informazione h, adottano o mantengono una congettura compatibile con h. Ciò implica che essi cambino congettura ogni volta che ricevono una informazione h, che è un falsificatore potenziale della congettura precedente. Il problema della coerenza semantica comincia a diventare più sfumato, quando si è in grado di confrontare le distribuzioni di probabilità soggettive con delle distribuzioni di frequenza. Sembrerebbe ragionevole richiedere che le probabilità soggettive non siano troppo diverse dalla frequenze empiriche, quando il campione delle osservazioni è sufficientemente ampio. Qui si toccano problemi di inferenza statistica di difficile soluzione, soprattutto nell'ambito della teoria dei giochi, in cui esiste sempre la possibilità di rappresentare una "ripetizione di esperimenti" nell'ambito di un più ampio gioco in forma estesa, facendo in tal modo sparire gli elementi di ripetitività (si veda la discussione in proposito contenuta nel paragrafo 1.2). Verrà qui adottata una "scorciatoia" che permette di evitare i problemi dell'inferenza statistica e della prova delle ipotesi e al tempo stesso permette un più semplice confronto tra la nozione di equilibrio qui proposta e quelle tradizionali della teoria dei giochi.

Postulato di razionalità.

(R) Ipotesi di razionalità miope: ogni giocatore j dotato di una congettura ς_j sceglie all'inizio del gioco una strategia σ_j* tale che

$$\Sigma_{z\in Z}\Pr(z\,|\,\varsigma_j,\sigma_j^*)u_j(z)\geq\Sigma_{z\in Z}\Pr(z\,|\,\varsigma_j,\sigma_j)u_j(z),\quad \sigma_j\in\Sigma_j$$

Le strategie che soddisfano la suddetta disuguaglianza per qualche ς_j data si dicono miopicamente razionali. L'insieme delle strategie miopicamente razionali rispetto ad una congettura $ç_j$ si indica con $\Sigma_j*(ç_j)$.

(AE) Ipotesi di apprendimento dall'esperienza: ogni giocatore j apprende dall'esperienza, cioé abbandona la congettura $ç_j$ quando questa è "sufficientemente smentita". Condizione sufficiente affinchè una congettura $ç_j$ sia rifiutata è che j riceva un'informazione $h \in Ref(ç_j)$.

A proposito dell'apprendimento ci si può chiedere come mai non si ipotizza che i giocatori seguano un procedimento di apprendimento bayesiano relativamente alle congetture. Si tratta in fondo di giocatori che massimizzano un'utilità attesa calcolata con probabilità soggettive e quindi la questione sembra ragionevole e pertinente. Ma quanto detto a proposito delle congettura e delle teorie all'inizio del paragrafo 3.2 dovrebbe far capire in anticipo la semplice risposta: l'apprendimento bayesiano è già incorporato nelle congetture stesse. L'apprendimento Bayesiano è un'adattamento della vecchia opinione alla nuova informazione: non rappresenta un apprendimento nell'accezione qui adottata. Ricevuta l'informazione h il giocatore i(h) usa una distribuzione subordinata ad h già precedentemente predisposta; a meno che quell'informazione non fosse ritenuta impossibile, ma in questo caso il teorema di Bayes non può essere d'aiuto e si verifica il vero apprendimento.

3.5. Equilibri congetturali decisionali e strategici.

Il postulato di razionalità è preciso per quanto riguarda la razionalità miope: si tratta né più né meno che della massimizzazione dell'utilità attesa. E' invece più sfumato per quanto rigurada l'apprendimento. L'unica cosa precisa che asserisce a riguardo è una condizione sufficiente affinchè un giocatore cambi teoria. Ma tale condizione è anche necessaria? Può esserlo in qualsiasi tipo di contesto? Come si vedrà la questione cruciale è di tipo interpretativo: il gioco in forma estesa considerato rappresenta il trascorrere del tempo socialmente rilevante, oppure rappresenta una situazione d'interazione "tipica" che si ripete nello spazio e nel tempo storici?

L'apprendimento è importante perchè implica nella generalità dei casi un cambiamento di strategia, ma bisogna subito fare una distinzione: si tratta di un cambiamento che avviene durante il gioco oppure dell'adozione di una diversa strategia in una eventuale ripetizione del gioco? Nel primo caso diremo che il giocatore sta usando un "criterio di rifiuto decisionale", nel secondo caso che sta usando un "criterio di rifiuto strategico". Il criterio di rifiuto decisionale è rilevante nel determinare il comportamento del giocatore durante il gioco. Quando egli riceve un'informazione falsificante, si rende conto che la congettura sulla base della quale aveva elaborato la sua strategia va cambiata. Alla luce della nuova congettura gli possono apparire razionali delle azioni diverse da quelle prescritte dalla strategia precedentemente adottata. Si potrebbe obbiettare che una strategia già tiene conto di tutte le possibili eventualità e quindi non c'è motivo di adottare azioni diverse da quelle prescritte. Ciò però significa caricare di un peso eccessivo e ingiustificato certi aspetti della definizione matematica delle strategie che dovrebbero avere una funzione puramente formale: semplificare la definizione, far sì che le strategie siano rappresentate da oggetti matematici omogenei, facilitare la costruzione della forma normale per giochi generici. Ma quando un giocatore razionale sceglie una strategia, egli semplicemente "anticipa" certe scelte future perchè ciò gli è indispensabile per valutare le conseguenze delle scelte presenti. A tal fine le scelte compiute in base a informazioni che l'agente ritiene impossibile ricevere sono irrilevanti. Non è irrazionale anticipare tali scelte, ma esse risultano per lo più arbitrarie perchè il principio della massimizzazione dell'utilità le lascia indeterminate. Bisogna sapere in anticipo quale nuova congettura si adotterebbe, per poter decidere razionalmente riguardo a tali alternative. Ma questo è una tipo di previsione che in generale non è possibile fare. Nel prossimo capitolo si vedrà che il concetto di strategia è più rilevante dal punto di vista di un altro giocatore o di un osservatore esterno, piuttosto che dal punto di vista di colui che tale strategia deve mettere in atto. Per le decisioni razionali di oggi è sufficiente che il giocatore j anticipi le decisioni di domani in base a una "strategia parziale" della seguente forma:

$$s_j:Coe(c_j)\cap Rel(s_j^*)\rightarrow A,$$

dove s_j^* è miopicamente razionale rispetto a $ç_j$ e s_j è la restrizione di s_j^*.

Ma non è possibile che una congettura venga abbandonata anche quando si verifica un evento che aveva una probabilità a priori "piccolissima"? E' forse possibile, ma non esistono motivi razionali per farlo. Si tratterebbe di un cambiamento puramente esogeno. Finchè non si ha una ripetizione di accadimenti che differiscocono solo nella specificazione delle coordinate spaziotemporali, non si dispone di una frequenza relativa di successo. Su quali basi si può scartare una congettura che attribuisce a un evento una probablità "piccola", ma positiva? In base a cosa si può affermare che quella probabilità è "troppo piccola"? L'unico criterio di rifiuto adeguato quando il tempo rappresentato dal gioco coincide col tempo "sociale" è quello di abbandonare una congettura se e solo se si verifica un evento che quella congettura riteneva impossibile.

Definizione 3.9.

Si definisce criterio di rifiuto decisionale di j una applicazione

$$Cr_j^d:Ç_j xH(X^j)\rightarrow\{0,1\}$$

che, data una certa informazione h, assegna a $ç_j$ il valore 0 se $h\in Ref(ç_j)$ e il valore 1 altrimenti, cioè:

$$(3.16)\quad Cr_j^d(ç_j,h)=\begin{cases}0\ , & h\in Ref(ç_j)\\ 1\ , & h\in Coe(ç_j)\end{cases}$$

Il criterio di rifiuto decisionale è in effetti una funzione indicatore della classe $Coe(ç_j)$ per una data congettura $ç_j$. Come tutte le funzioni indicatore esso è interpretabile come condizione logica (0=falso,no; 1=vero,si), ma ammette anche un'interpretazione probabilistica: $Cr_j^d(ç_j,h)$ è la probabilità che j attribuisce alla congettura $ç_j$ subordinatamente all'informazione h. Tale probabilità può essere solo 0 o 1 perchè la congettura è dedotta dalla teoria che j usa per valutare le probabilità e l'apprendimento bayesiano è già incorporato in essa, quindi può soltanto avere opinioni certe sulla sua congettura.

Si vedrà che questo tipo di rappresentazione dei criteri di rifiuto permette di definire le condizioni di equilibrio in modo semplicissimo.

La definizione di un criterio di rifiuto strategico è più problematica. Tale criterio di rifiuto è rilevente quando il gioco rappresenta una situazione d'interazione tipica, che può ripetersi un numero indefinito di volte nel tempo e nello spazio. Rappresentare la classe di processi dinamici in cui tale situazione d'interazione può essere inserita o è impossibile oppure permette di costruire un più ampio gioco in forma estesa nell'ambito del quale diventa rilevante il criterio di rifiuto ~~strategico~~ decisionale. Si deve perciò ricorrere a un esperimento mentale: ogni giocatore all'inizio del gioco sceglie una strategia che massimizza l'utilità attesa rispetto alla sua congettura. Le informazioni di cui si può disporre alla fine di una qualsiasi partita , cioè le **informazioni finali**, sono determinate dalle regole gioco, esattamente come le informazioni che si ricevono durante una partita. Si può immaginare che alla fine del gioco ogni giocatore possa osservare le frequenze relative di successo relative a quegli eventi cui corrispondono le sue informazioni finali. Tali frequenze sono prodotte da un numero indefinito di partite, che potrebbero essere giocate da un calcolatore mettendo in atto le strategie dei giocatori (ovviamente il calcolatore deve poter generare numeri casuali). In base alle frequenze osservate i giocatori decidono se mantenere o rifiutare le loro congetture. Se il numero di ripetizioni è indefinitamente grande la legge dei grandi numeri permette di "identificare" le frequenze osservate con le probabilità oggettive. Si può quindi spingere ancora oltre l'esperimento mentale ipotizzando che alla fine del gioco ogni giocatore possa "osservare" la probabilità oggettiva di ogni insieme d'informazione finale.

Le informazioni finali sono il prodotto di ciò che il giocatore può dedurre dal suo guadagno e di tutte le informazioni immagazzinate (grazie alla memoria perfetta) durante il gioco. Il primo tipo d'informazione è dato dalla cotroimmagine, tramite la funzione u_j,del guadagno ricevuto. Se u_j fosse biunivoca, j potrebbe capire quale partita z si è svolta soltanto in base al guadagno ottenuto; ma in generale questo tipo d'informazione è meno accurato. Si pensi al pocker: alla fine di ogni mano i giocatori che hanno "lasciato" non sono tenuti a mostrare le carte e quindi agli altri giocatori è impossibile conoscere alcuni particolari della partita che si è appena svolta. A volte il guadagno di un giocatore j,u_j^*, è lo stesso per più di una tra le possibili partite/risultati $z\epsilon Z$, ma le informazioni acquisite durante il gioco e il ricordo delle sue stesse azioni gli permettono di capire che qualche partita $z^*\epsilon u_j^{-1}(u_j^*)$ non può essersi svolta. Questa informazione può essergli preziosa, perchè può fargli capire che sarebbe stato più efficiente adottare una strategia diversa, anche se il guadagno ottenuto può essere quello che si aspettava. Le informazioni di questo tipo sono rappresentate dai nodi finali raggiungibili dall'ultimo insieme d'informazione attrversato dal "vero" percorso del gioco, z°, quando si sceglie l'azione effettivamente scelta da j in base a quella informazione. Tale azione è $\alpha[s(\max(X_j)_{z^\circ},z^\circ)]:=a^\circ$; i nodi su cui è definita a° sono quelli dell'insieme $\alpha^{-1}(a^\circ)$ incluso in $S(\max(X_j)_{z^\circ})$; i nodi finali raggiungibili quando a° viene effettivamente scelta sono quelli dell'insieme $Z(\alpha^{-1}(a^\circ))$.

Definizione 3.10. Si definisce **informazione finale di j data la partita z** il seguente insieme:

$$(3.17)\quad h_j^f(z):=Z[\alpha^{-1}(a(z))] \cap u_j^{-1}(u_j(z)),$$
$$\text{con } a(z):=\alpha(s(\max(X_j)_z,z)).$$

La corrispondenza $h_j^f:Z=>Z$ definita dalla (3.17) è detta **struttura dell'informazione finale di j.**

E' facile verificare che h_j^f genera una partizione di Z, cioè per ogni z e z'

$$z\epsilon h_j^f(z),\ z'\epsilon h_j^f(z')$$
$$h_j^f(z)=h_j^f(z') \text{ oppure } h_j^f(z)\cap h_j^f(z')=\emptyset$$
$$\cup_{z\epsilon Z} h_j^f(z)=Z$$

Il più semplice criterio di rifiuto strategico che si può immaginare è quello per il quale j abbandona la sua congettura quando le probabilità soggettive degli insiemi d'informazione finale non coincidono con le probabilità oggettive "osservate" alla fine del gioco, indotte dalla n-upla delle strategie miste adottate dai giocatori:

$$(3.18)\qquad Cr_j^{*}(\varsigma_j,\sigma)=\begin{cases}1 & ,Pr\{h_j^{f}(.)\,|\sigma\}=Pr\{h_j^{f}(.)\,|\varsigma_j,\sigma_j\}\\ 0 & ,\text{altrimenti}\end{cases}$$

dove $Pr\{h_j^{f}(z)\,|\ldots\}=\sum_{z'\in h_j^{f}(z)} Pr\{z'\,|\ldots\}$.

Ma una definizione più generale potrebbe tenere conto del fatto che i giocatori possono osservare solo le frequenze relative di successo prodotte da un numero finito, benchè grande, di ripetizioni. Quindi le probabilità oggettive rappresentano solo un'approssimazione delle frequenze relative di successo (che sono variabili aleatorie) e queste ultime non sono completamente affidabili per i giocatori. Un modo per inglobare queste considerazioni nella definizione matematica del criterio di rifiuto è quello di permettere che ci sia una distanza positiva tra la distribuzione oggettiva e quella soggettiva (si ricordi che sono entrambe punti del simplesso $P(Z)$) senza che la congettura da cui è derivata la distribuzione soggettiva sia rigettata. Si tratterebbe perciò di costruire una ragione di rifiuto $R(\varsigma_j,\sigma_j)$ inclusa in $P(Z)$, la cui chiusura non coincide con $P(Z)$: se $Pr\{.\,|\sigma\}\in R(\varsigma_j,\sigma_j)$ c_j è rifiutata. Un criterio di rifiuto di questo tipo sarebbe forse più realistico del precedente, ma anche molto più complicato e inoltre dipenderebbe da parametri arbitrari rispetto al modello iniziale. In questa sede si preferisce evitare il più possibile i problemi legati alla statistica inferenziale e alla prova delle ipotesi, concentrandosi sugli aspetti che si ritengono essenziali per l'apprendimento nell'ambito della teoria dei giochi: in particolare l'importanza fondamentale della struttura dell'informazione finale. Il criterio di rifiuto definito dalla (3.18), cui a volte ci si riferirà con l'espressione "criterio di rifiuto strategico forte", è quindi adottato come "scorciatoia". D'altra parte una condizione di uguaglianza tra probabilità soggettive e oggettive sembra essere nello spirito di tutte le definizioni di equilibrio prodotte nell'ambito della teoria dei giochi non cooperativi. Si vedrà infatti nel capitolo 4 che gli equilibri definibili in base alla (3.18) costituiscono una generalizzazione degli equilibri tradizionali e che per certe classi di giochi coincidono con questi ultimi.

Si indichi con Σ il prodotto cartesiano degli insiemi delle strategie comportamentali dei giocatori: $\Sigma:=(\times_{j\in I}\Sigma_j)$. Il criterio di rifiuto strategico si definisce allora nel modo seguente:

Definizione 3.11. Si dice **criterio di rifiuto strategico** di j l'applicazione $Cr_j^{*}:Ç_j \times \Sigma \to \{0,1\}$ definita dalla (3.18).

Data una costellazione di congetture $ç:=(ç_1,ç_2...ç_n)$ e una combinazione di strategie σ miopicamente razionali rispetto a $ç$, si ha un **equilibrio congetturale** quando i messaggi indotti da σ non sono tali da far rifiutare alcuna delle congetture in $ç$. Questo è semplicemente l'adattamento alla teoria dei giochi della generale definizione di equilibrio che caratterizza l'individualismo metodologico (cfr. paragrafo 1.2). Una buona definizione di equilibrio dovrebbe dare delle condizioni necessarie e sufficienti affinchè certi valori descrivano lo stato stazionario di un processo. Nell'ambito dell'individualismo metodologico tale processo risulta essere in ultima analisi un processo di apprendimento. Affinchè le condizioni che si preciseranno in seguito siano veramente necessarie e sufficienti per descrivere lo stato stazionario di un sistema sociale, bisogna anzitutto indentificare le variabili di stato del sistema con la coppia $(ç,\sigma)$. Si può infatti avere apprendimento senza che per questo vi sia un cambiamento di strategia: basta che la stessa strategia sia razionale rispetto a due congetture diverse. Bisogna inoltre ipotizzare che gli agenti non cambino le loro congetture o le loro strategie se non hanno incentivi positivi per farlo. Tali cambiamenti sono da considerarsi esogeni e la definizione di equilibrio non ne tiene conto.

Per ottenere una definizione precisa dell'equilibrio bisogna precisare il criterio di rifiuto cui si fa riferimento. Se si analizza una singola partita, il criterio rilevante è quello decisionale. Si ha un **equilibrio decisionale** quando la coppia $(ç,\sigma)$ è tale che lungo ogni possibile percorso i giocatori non cambiano congettura finchè possono fare delle reali scelte. Se invece si ritiene che il gioco rappresenti una situazione tipica e ripetitiva, il criterio di rifiuto rilevante è quello strategico. Si ha un **equilibrio strategico** quando le probabilità oggettive degli insiemi d'informazione finali "osservate" dai giocatori alla fine del gioco coincidono con quelle soggettive derivate dalle congetture.

Definizione 3.12. Un nodo decisionale $x \in X$ si dice **puramente informativo** se l'insieme $S(x)$ ha un unico elemento. L'insieme dei nodi puramente informativi si indica con X_{PI}. Una informazione $h \in H(X)$ si dice **attiva** rispetto a σ se per qualche $x \in h$ esiste un x' per il quale $x < x' \in (X_{i(h)} \backslash X_{PI})$ e $Pr\{Z(x')|\sigma\} > 0$ oppure se $x \in (X_{i(h)} \backslash X_{PI})$. L'insieme delle informazioni attive rispetto a σ si indica con $H[\sigma]$.

Quanto detto in precedenza dovrebbe chiarire almeno in parte il senso della definizione 3.12, ma è forse opportuno un ulteriore commento. Un nodo puramente informativo rappresenta una situazione nella quale il giocatore a cui tocca "muovere" si limita in realtà a ricevere delle informazioni, senza compiere alcuna scelta. E' possibile che, dopo la sua ultima scelta tra più alternative, un giocatore riceva ancora delle informazioni; queste informazioni gli serviranno in sede di valutazione conclusiva, ma per la partita in corso non hanno più alcuna rilevanza, perchè ormai tutte le decisioni possibili sono state già prese. Quando una informazione h non è di questo tipo significa che i(h) può ancora cambiare le sue decisioni e quindi è rilevante che possa apprendere. Per questo h è detta "attiva". Il riferimento a σ è necessario perchè questa proprietà dipende dalle strategie adottate: solo se il percorso del gioco attraversa l'insieme d'informazione h tale informazione può essere "attivata". Si ha un equilibrio decisionale quando tutte le informazioni che possono essere attivate non sono tali da falsificare le congetture dei giocatori. Quando una coppia $(ç,\sigma)$ è un equilibrio decisionale, σ può essere utilizzata per prevedere l'andamento del gioco, perchè i giocatori non devieranno dalle loro strategie.

Si indichi con $\Sigma^*(ç)$ il prodotto cartesiano degli insiemi $\Sigma_j^*(ç_j)$ delle strategie miopicamente razionali rispetto alle congetture $ç_j$: $\Sigma^*(ç):=(\times_{j\in I}\Sigma_j^*(ç_j))$. Gli equilibri congetturali strategici e decisionali possono allora essere definiti come segue.

Definizione 3.13. Si definisce equilibrio congetturale decisionale una coppia $(ç,\sigma)$ tale che

$$(3.19)\qquad \prod_{h\in H[\sigma]} Cr_{i(h)}{}^{d}(ç_{i(h)},h)=1,\ \sigma\in\Sigma^*(ç).$$

Si definisce equilibrio congetturale strategico una coppia $(ç,\sigma)$ tale che

$$(3.20)\qquad \prod_{j\in I}Cr_j{}^{s}(ç_j,\sigma)=1,\ \sigma\in\Sigma^*(ç).$$

I prodotti che compaiono sono soggetti a diverse interpretazioni complementari:

a) rappresentano la probabilità, valutata da un osservatore esterno, che i giocatori conservino le loro congetture e quindi le loro strategie;

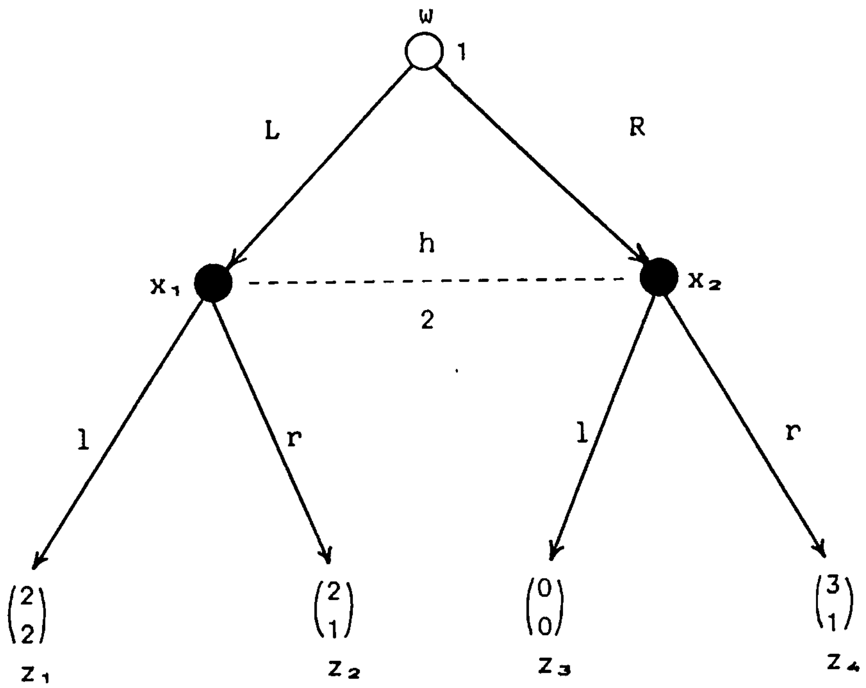
b) rappresentano il prodotto logico delle condizioni in base alle quali il giocatore $j=1,2...n$ non abbandona la sua congettura: il prodotto numerico è uguale a 1 quando tutte le condizioni sono verificate; se non se ne verifica una o più di una, il prodotto logico assume il valore "falso" e quello numerico il valore 0.

3.6. La rappresentazione standard in forma normale e le sue carenze.

In cosa differiscono le definizioni sopra enunciate dalle definizioni classiche? Ogni equilibrio non cooperativo di tipo classico è un equilibrio Nash; vi sono poi vari tentativi di ridurre a un punto o almeno a un insieme molto "piccolo" l'insieme degli equilibri Nash di un gioco facendo a volte un esplicito riferimento alle aspettative dei giocatori. Viceversa la (3.19) e la (3.20) costituiscono una generalizzazione e quindi ampliano l'insieme degli equilibri. Uno dei motivi fondamentali è che le congetture dei giocatori possono essere "non costanti", tali cioè da implicare una dipendenza funzionale delle strategie altrui dalla propria strategia (e dallo stato di natura), mentre nell'equilibrio Nash le strategie altrui sono implicitamente ritenute indipendenti (un caso di congettura "non costante" è rappresentato nella figura 1, un esempio di equilibrio con congetture "non costanti" sarà fornito nel paragrafo 3.8, figura 9). Si può anche dire che quello di Nash è un equilibrio congetturale con congetture costanti, dunque compatibili con la conoscenza della forma estesa del gioco (informazione completa), almeno dal punto di vista della struttura dell'informazione. Ma non è lecito dedurne che un equilibrio non Nash sia necessariamente incompatibile con l'informazione completa (si noti che non si sta parlando di "common knowledge"); infatti nel considerare i soli eq. Nash si suppone implicitamente che alla fine del gioco ogni giocatore conosca le strategie usate dagli altri. Inoltre il fatto che la teoria dei giochi classica non prenda in considerazione la ripartizione dell'insieme dei risultati Z in insiemi d'informazione finale per ogni giocatore, si presta a essere interpretato nel senso di una presunzione della conoscenza dell'esito del gioco, quando questo viene concluso. Ma se, più correttamente, si considera che l'informazione finale è data dalla (3.17) è possibile ottenere equilibri con congetture "costanti" (compatibili con l'informazione completa), che non sono "best reply" l'una contro l'altra, perchè l'imperfetta informazione finale non permette di confutare le errate congetture dei giocatori. E' forse bene ricordare che tale informazione finale imperfetta è tutt'altro che rara e caratterizza alcuni dei più importanti giochi di carte, tra i quali il Poker, assai studiato dai teorici dei giochi.

Nella figura 2 è rappresentato un gioco a mosse simultanee. Per giochi di questo tipo la rappresentazione in forma normale e la nozione di equilibrio ad essa connessa, quella di Nash, sembrano essere l'ideale. Ma dalla forma normale non si capisce quali sono le informazioni di cui dispongono i giocatori per valutare "ex post" le loro congetture. La pre-

Quando l'informazione finale è imperfetta, si possono avere degli equilibri congetturali non Nash, anche se le congetture sono compatibili con l'informazione completa.



forma normale

1 \ 2	l	r
L	2,2	2,1
R	0,0	3,1

eq. cong. non Nash

eq. Nash

informazione finale

1	$\{z_1, z_2\}$, $\{z_3\}$, $\{z_4\}$
2	$\{z_1\}$, $\{z_3\}$, $\{z_2, z_4\}$

figura 2

sunzione implicita nella condizione di Nash, che ogni giocatore possa conoscere "ex post" le strategie altrui, non è valida in generale; l'esempio che segue, basato sulla figura 2, lo dimostra.

Esempio 3.1. Si consideri il gioco della figura 2 e si supponga che i giocatori facciano le seguenti congetture:

- **giocatore 1**: "2 adotta la strategia l" (1 potrebbe pensare che 2 si aspetti la strategia L e scelga l di conseguenza; in effetti (L,l) è un equilibrio Nash e quindi la congettura di 1 ha anche un certo "fondamento teorico"); ciò equivale a

$$c_1(z_1|x_1)=c_1(z_3|x_2)=1$$

- **giocatore 2**: "1 adotta la strategia R" (vale un discorso analogo a quello fatto sopra: anche (R,r) è un equilibrio di Nash e quindi anche la congettura di 2 ha un certo "fondamento teorico"); ciò equivale a

$$c_2(x_2|w)=1$$

La congettura c_1 e la strategia razionale rispetto ad essa L possono essere congiuntamente considerate come la "scelta" di uno dei due equilibri Nash del gioco nel rispetto del principio del maximin. Lo stesso vale per 2. Si può quindi affermare che le strategie L e r non solo sono miopicamente razionali, ma ricevono una "giustificazione" dalla teoria. Il risultato che si produce, z_2 ovvero (L,r), non è un equilibrio Nash: la "best reply" contro r è R e la "best reply" contro L è l. Ma i giocatori non possono accorgersene. La struttura dell'informazione finale è tale che le congetture di entrambi vengono confermate. Quindi (c_1,c_2,L,r) è un equilibrio congetturale (strategico).

Si potrebbe obbiettare che la struttura dell'informazione finale qui considerata è tanto arbitraria quanto quella implicita nella nozione di equilibrio di Nash. Alla fine del gioco i giocatori potrebbero essere in grado di osservare la strategia altrui anche se non possono dedurla dal guadagno ricevuto. Ma questa controbbiezione è male indirizzata. Ciò che qui si sostiene è che la forma normale non fornisce elementi sufficienti. Se la forma estesa è correttamente specificata, tutte le informazione che giungono ai giocatori devono essere rappresentate. Se si vuole ipotizzare che i giocatori dopo aver compiuto le loro scelte vengono a conoscenza dell'esito del gioco, basta specificare la forma estesa in modo opportuno. Se tutte le funzioni u_j $(j \in I)$ sono biunivoche, ciò è di per sé sufficiente. Se non lo sono, come nel caso considerato, basta introdurre dei nodi puramente informativi, come nella figura 3. Il gioco della figura 3 è caratterizzato da una informazione finale perfetta e le strategie (trattandosi di un gioco a mosse simultanee) sono completamente rivelate ai giocatori.

L'esempio 3.1 dimostra che la forma normale di un gioco è insufficiente per definirne gli equilibri congetturali, anche ammettendo di aver definito cosa sia una congettura in un gioco in forma normale, cosa che si farà in seguito. Questa insufficienza non viene eliminata nemmeno se ci si restringe alla classe dei giochi a "informazione finale perfetta".

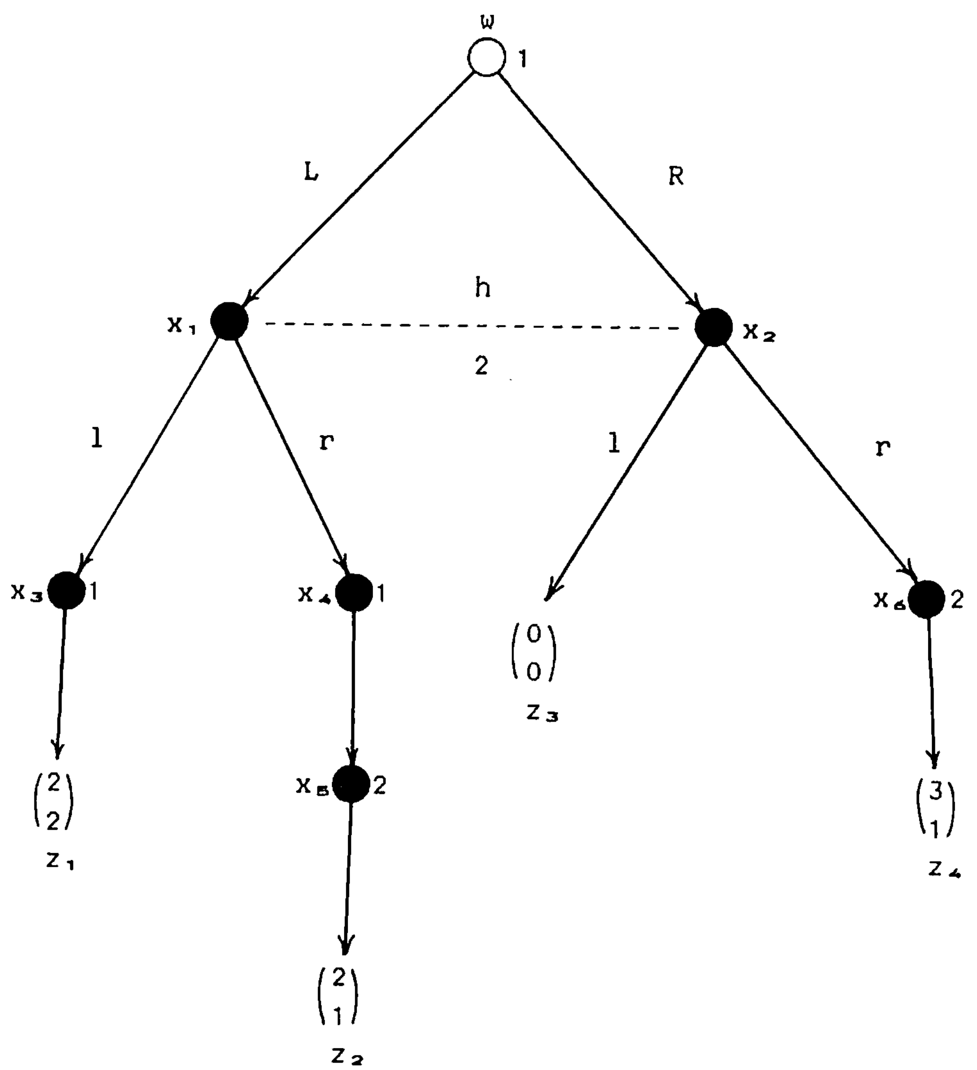
Definizione 3.14. Si dice che il gioco Γ è caratterizzato da una **informazione finale perfetta** se

$$(3.21) \quad h_j^f(z)=\{z\} \ , \ z \in Z \ , \ j \in I$$

E' molto comune che in questi giochi uno stesso esito z sia producibile con più di una n-upla di strategie pure. Ciò accade quando per qualche z esiste un h "non attraversato" da P(z) (cioè $h \cap P(z)=\emptyset$) e per il quale i(h) può scegliere tra più alternative: la scelta della mossa da effettuare se si raggiunge h è del tutto irrilevante per ottenere z. A questo proposito è assai istruttivo lo studio di un caso di "minaccia", che servirà anche a esemplificare i concetti di equilibrio definiti sopra. Questo esempio verrà poi ripreso numerosissime volte nel corso della dissertazione.

Esempio 3.2. Si consideri il gioco della figura 4. Esso ammette la seguente interpretazione.

Come si rappresenta l'ipotesi che i giocatori vongono a conoscenza dell'esito del gioco.



forma normale
come nella figura 2

informazioni finali

1	$\{z_1\}$, $\{z_2\}$, $\{z_3\}$, $\{z_4\}$
2	$\{z_1\}$, $\{z_2\}$, $\{z_3\}$, $\{z_4\}$

figura 3

Si può immaginare che il giocatore 2 minacci 1 con l per indurlo a scegliere L, ovvero che gli comunichi di aver adottato la strategia pura (x,l). Tuttavia quello di 2 è un "bluff": egli intende scegliere la strategia pura o mista che massimizza la sua utilità attesa sulla base della sua teoria. 1 sa che 2 non è vincolato a seguire la strategia dichiarata e necessita di una teoria su 2 per prendere una decisione. Tale teoria può riguardare la razionalità di 2, il suo eventuale desiderio di mantenere credibilità e per la formulazione di tale teoria sarà rilevante l'informazione a priori che 1 possiede sul gioco, in particolare la conoscenza della funzione di utilità di 2. Considerazioni analoghe valgono per 2 nei confronti di 1. In ogni caso la teoria di 1 si riflette in una congettura $c_1(z_2|x)=p$, che può interpretarsi come il grado di credenza alla minaccia, mentre la teoria di 2 si riflette in una congettura $c_2(x|w)=q$, che può interpretarsi come il grado di credenza nel fatto che 1 "non abbocchi" e che quindi si comporti come se non credesse alla minaccia.

Si noti che c_1 e c_2 corrispondono a strategie miste per 2 e 1 rispettivamente, dunque sono compatibili con l'informazione completa.

Facendo variare i valori di p e q si ottiene un continuo di equilibri congetturali divisibile in tre sottoinsiemi:

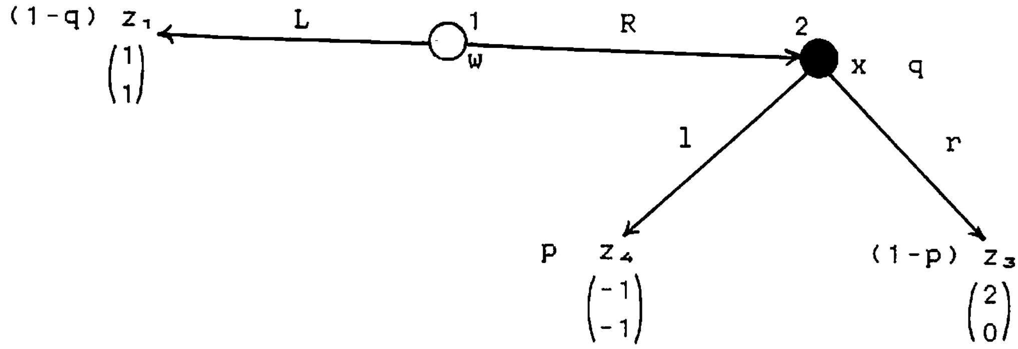
(a) equilibri non Nash,
(b) equilibri Nash non perfetti (o non sequenziali),
(c) equilibrio perfetto.

In particolare si mostrerà che anche se 1 è piuttosto scettico (nel senso che attribuisce all'attuazione della minaccia una probabilità inferiore a 1/2), egli può ritenere razionale cedere alla minaccia; mentre 2, se non è completamente certo che 1 ceda, sceglie una strategia (si badi, non una azione!) diversa da quella dichiarata.

Consideriamo dapprima la corrispondenza $\Sigma^*(p,q)$ che assegna ad una coppia di congetture l'insieme di coppie di strategie miopicamente razionali rispetto ad esse.

Giocatore 1: se $0 \leq p < 1/3$, $\sigma_1^* = ((0,L),(1,R))$, infatti:

Rappresentazione in forma estesa e in forma normale di un caso di minaccia.



1 \ 2	l	r
L	1 , 1	1 , 1
R	-1 , -1	2 , 0

Il giocatore 2 minaccia l'azione l se 1 non lo favorisce scegliendo L. Ma se 1 conosce la funzione di utilità di 2 e ritiene che 2 sia razionale, la minaccia non risulta credibile. Se almeno una di queste due condizioni non si verifica, 1 può scegliere L in base a una congettura $p>1/3$. Questa scelta impedisce a 1 di scoprire la strategia di 2 e la congettura non può essere rifiutata. La sola forma normale, non solo non permette di verificare la credibilità di l, ma non permette neanche di capire se 1 può osservare la strategia di 2, quando sceglie L.

figura 4

$$Pr\{z_1|p,R\}u_1(z_1)+Pr\{z_2|p,R\}u_1(z_2)+Pr\{z_3|p,R\}u_1(z_3)=$$
$$=0 \times 1 + 0 \times p \times (-1) + (1-p) \times 2 = 2-3p >$$
$$>Pr\{z_1|p,L\}u_1(z_1)+Pr\{z_2|p,L\}u_1(z_2)+Pr\{z_3|p,L\}u_1(z_3)=$$
$$=1 \times 1 + 0 \times p \times (-1) + 0 \times (1-p) \times 2 = 1$$

l'utilità attesa ottenibile con una strategia mista è una media ponderata, dunque interna, delle utilità ottenibili con le strategie pure; quindi una strategia mista può essere ottimale solo se è una mistura (con probabilità positive) di più strategie pure tutte ottimali.

Se $p=1/3$, $\sigma_1{}^*\epsilon\Sigma_1{}^*=\{((\mu,L),(1-\mu,R)),0\leq\mu\leq1\}=\Sigma_1$, infatti

$$E(u_1(z)|p,R)=2-3p=1=E(u_1(z)|p,L);$$

se $1/3\leq p\leq1$, $\sigma_1{}^*=((1,L),(0,R))$: $2-3p<1$;

quindi anche se 1 attribuisce una probabilità $p\leq1/2$ alla eventuale messa in atto della minaccia, purchè sia $p>1/3$, egli si comporterà come se ci credesse e cederà.

Giocatore 2: se $q=0$ (2 è convinto che 1 ceda) $\sigma_2{}^*\epsilon\Sigma_2{}^*=\{((\beta,l),(1-\beta,r)),0\leq\beta\leq1\}=\Sigma_2$,infatti:

$E(u_2(z)|q,(x,r))=1-q=1-2q=E(u_2(z)|q,(x,l))$ (2 è indifferente perchè è sicuro di non dover mettere in atto la sua minaccia);

se $0<q\leq1$, $1-q>1-2q$ e quindi $\sigma_2{}^*=((0,l),(1,r))$ (basta una minima incertezza affinchè 2 decida di non mettere in atto la minaccia).

Lo spazio delle congetture è $\c{C}=\{(p,q)\epsilon R^2:0\leq p\leq1,0\leq q\leq1\}$. $\c{C}$ è ripartito in sei sottoinsiemi :

$A=\{(p,q):0\leq p<1/3,q=0\}$,
$B=\{(p,q):0\leq p<1/3,0<q\leq0\}$,
$C=\{(p,q):p=1/3,q=0\}$,
$D=\{(p,q):p=1/3,0<q\leq1\}$,
$E=\{(p,q):1/3<p\leq1,q=0\}$,
$F=\{(p,q):1/3<p\leq1,0<q\leq1\}$.

In riferimento a tali insiemi, sui quali $\Sigma^*(p,q)$ è costante, si esamineranno gli equilibri congetturali.

Le condizioni di **equilibrio decisionale** sono

(a) se $\sigma_1(R)>0$ allora $Cr_2^d(q,x)=1$
(b) $\sigma\in\Sigma^*(p,q)$;

ma (a) equivale a

(a') se $\sigma_1(L)<1$ allora $q>0$.

(a') e (b) escludono che le congetture in A possano essere di equilibrio, perchè (b) implica $\sigma_1(L)=0$ e ciò per (a') implica $q>0$, cioè (p,q) non in A.

In questo gioco (ς,σ) corrisponde a $(p,q,\sigma_1(L),\sigma_2(l))$ e l'insieme degli equilibri decisionali è dato da:

$Bx\{(0,0)\}$ U $Cx\{1\}x[0,1]$ U $Dx[0,1]x\{0\}$ U $Ex\{1\}x[0,1]$ U U $Fx\{(1,0)\}$ (si veda la fig. 5).

Come era da aspettarsi, l'insieme degli equilibri decisionali è molto vasto: la sua proiezione su Ç ha misura bidimensionale (secondo Lebesgue) pari a quella di Ç stesso (cioè 1); la proiezione su Σ ha misura bidimensionale nulla, ma misura lineare pari a 2.

L'insieme degli **equilibri strategici** dati dal criterio "forte" (3.18) è notevolmente più ristretto. Anche con tale criterio, 1 non è in grado di rifiutare la sua congettura se cede alla minaccia, ma può controllarla ed eventualmente rifiutarla se non cede. Le condizioni di equilibrio strategico con criterio forte sono:

(c) se $\sigma_1(L)<1$ allora $Pr\{z|p,\sigma_1\}=Pr\{z|\sigma\}$
(d) $Pr\{z|q,\sigma_2\}=Pr\{z|\sigma\}$
(b) $\sigma\in\Sigma^*(p,q)$

(c) equivale a (c'): se $\sigma_1(L)<1$ allora $p=\sigma_2(l)$
e (d) a (d'): $q=\sigma_1(R)=1-\sigma_1(L)$.

Si ottiene l'insieme di equilibri

$$\{(0,1,0,0)\} \cup (C \cup E)\times\{1\}\times[0,1]$$

il primo dei due insiemi è puntiforme e corrisponde all'unico equilibrio perfetto (gli equilibri perfetti e sequenziali saranno discussi nel prossimo capitolo, per ora basti sapere che, in un gioco come questo, escludono le minacce non credibili), il secondo ha una proiezione su $Ç_1 \times \Sigma_2$ con misura bidimensionale pari a 2/3 e contiene un continuo di equilibri Nash non perfetti dato da (fig. 6):

$$\{(p,q,\sigma_1(L),\sigma_2(l)):1/3\leq p\leq 1, q=0, \sigma_1(L)=1, \sigma_2(l)=p\};$$

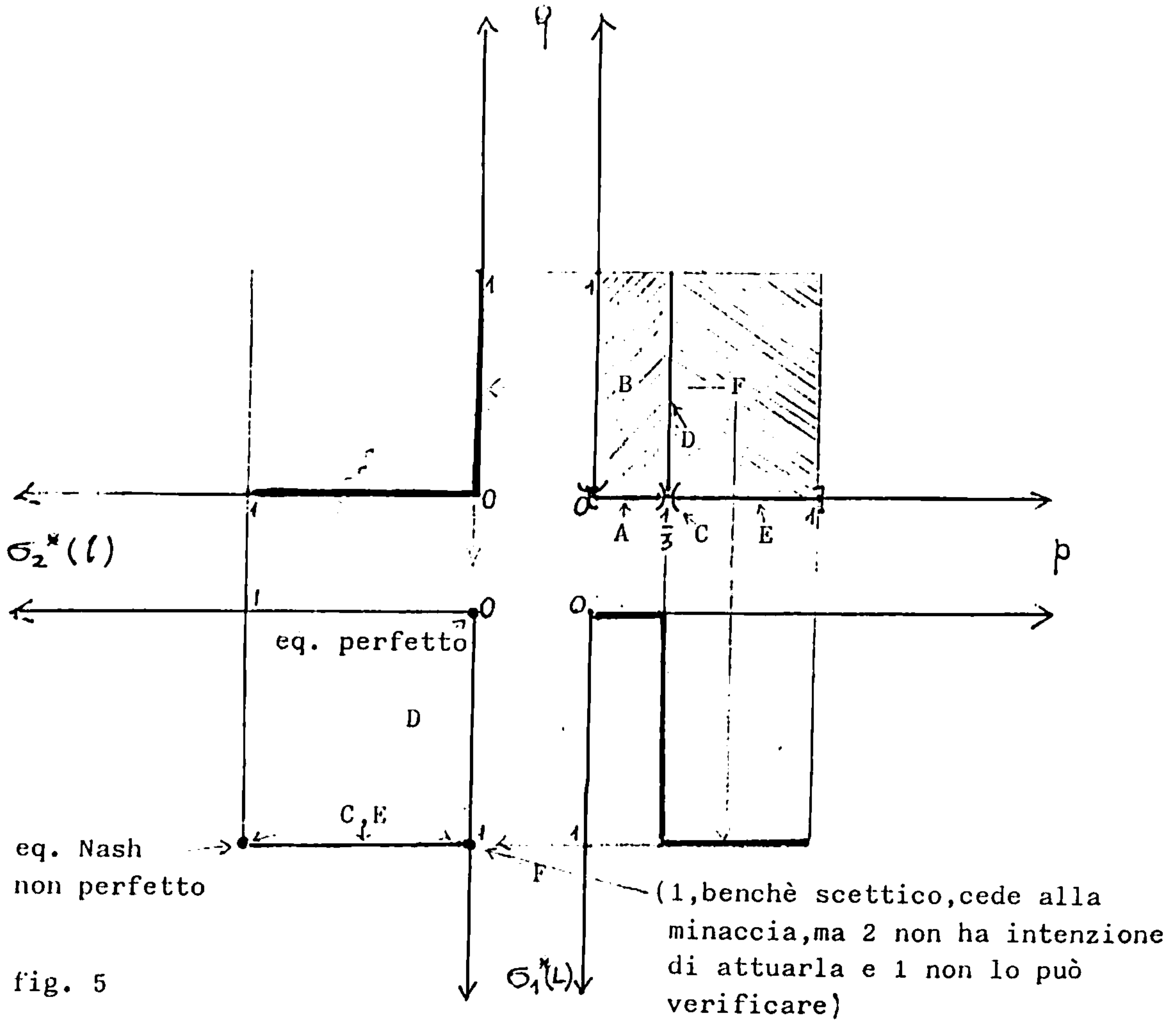
ma, non potendo leggere nel pensiero a 2, questi equilibri Nash non sono empiricamente distinguibili tra loro né da gli altri equilibri congetturali non perfetti, poichè tutti producono l'esito z_1, in cui 1 cede alla minaccia. Si vedrà nel capitolo 4 che in tutti i giochi a due persone con informazione finale perfetta gli equilibri congetturali producono gli stessi risultati (o le stesse distribuzioni di probabilità su Z) degli equilibri Nash, purchè i giocatori conoscano la struttura dell'informazione.

Naturalmente, adottando un criterio di rifiuto "debole", l'insieme degli eq. strategici risulta ampliato e più simile all'insieme degli eq.decisionali. Le condizioni di eq. strategico diventano:

se $\sigma_1(L)<1$ allora $\sigma_2(l)-\mu<p<\sigma_2(l)+\mu$
se $\sigma_1(R)\in\{0,1\}$ allora $q=\sigma_1(R)$, altrimenti $\sigma_1(R)-\beta<q<\sigma_1(R)+\beta$
$\sigma\in\Sigma^*(p,q)$

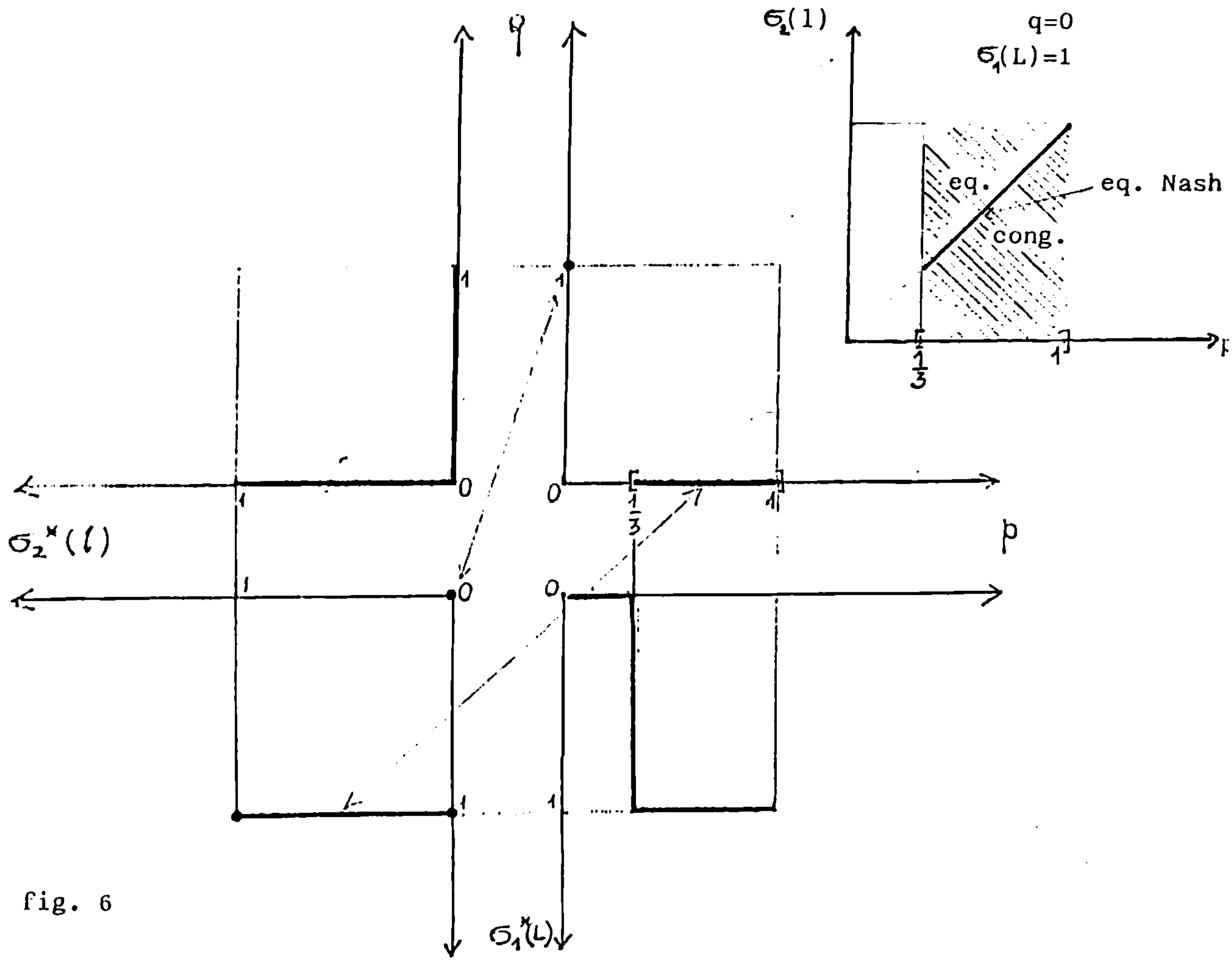
con $\mu,\beta\in(0,1)$ gradi di tolleranza di 1 e 2.

Questo gioco gode di due proprietà forti relative all'informazione: è caratterizzato da una informazione perfetta e da una informazione finale perfetta. Ciò potrebbe indurre a pensare che la nozione di equilibrio di Nash sia adeguata. Questa conclusione può essere vera nel senso



q
1
0
B
F
D
A
C
E
p
$\sigma_2^*(l)$
1
0
eq. perfetto
D
C, E
eq. Nash
non perfetto
F
(1,benchè scettico,cede alla minaccia,ma 2 non ha intenzione di attuarla e 1 non lo può verificare)
$\sigma_1^*(L)$

fig. 5



q
$\sigma_2(1)$
q=0
$\sigma_1(L)=1$
eq.
cong.
eq. Nash
1
0
p
$\sigma_2^*(l)$
$\sigma_1^*(L)$

fig. 6

limitato che gli esiti z di equilibrio sono tali se e solo se sono sostenuti da un equilibrio di Nash (cfr. paragrafo 4.4, teorema 4.4); ma non è vera se si presume che in equilibrio ogni giocatore conosca le strategie altrui, ed è proprio questa presunzione che rende significativa la condizione di Nash. Il problema di questo gioco è che i risultati z non sempre sono in grado di rivelare a ogni giocatore le strategie altrui (è il caso di z_1). Si vedrà in seguito che questa proprietà (quella per cui ogni risultato rivela le strategie dei giocatori) è soddisfatta se e solo se il gioco è a mosse simultanee (cfr. lemma 3.1).

Una ulteriore carenza della forma normale è che essa "sopprime" gli stati di natura w, ma in generale l'informazione finale si limita a rivelare al giocatore j una serie di compatibilità e incompatibilità tra gli stati di natura w e le strategie pure giocate dagli altri s^j. Ciò è messo in evidenza dal seguente gioco del "pari o dispari aleatorio", in cui la scelta di chi "tiene il pari " è aleatoria e i giocatori a fine gioco sanno solo se hanno vinto o perso (figura 7).

Gli insiemi di informazione finale di 1 sono

$h_1^f(z_1)=\{z_1,z_6\}$, $h_1^f(z_2)=\{z_2,z_5\}$, $h_1^f(z_3)=\{z_3,z_8\}$, $h_1^f(z_4)=\{z_4,z_7\}$.

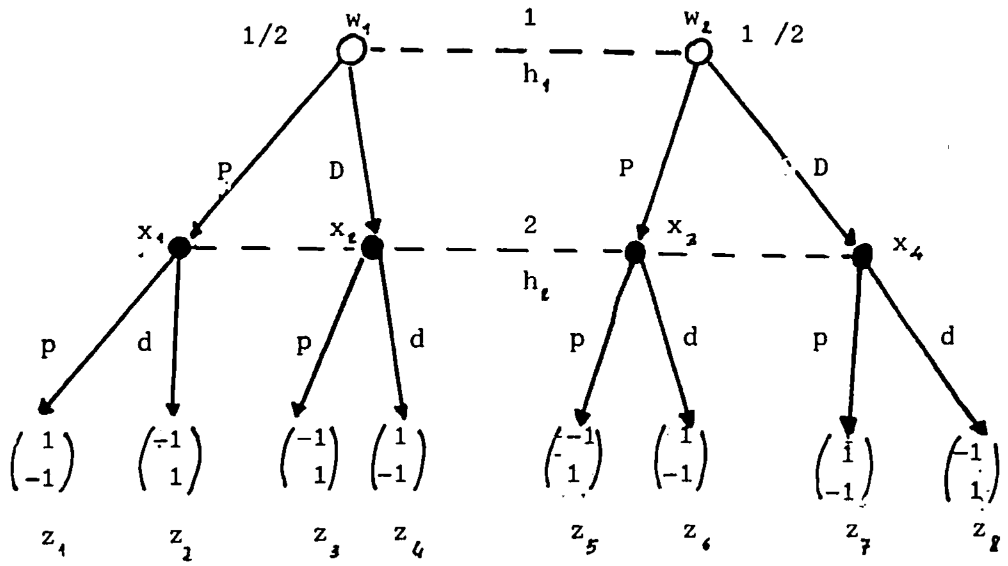
La struttura dell'informazione finale è tale che ogni giocatore non è in grado di capire perchè ha vinto o perso; infatti, data la sua strategia, lo stesso guadagno può essere prodotto da due differenti coppie stato di natura/strategia altrui. Ma in base alla forma normale non si può dedurre alcunchè sulla struttura dell'informazione finale dei giocatori.

Di giochi come questo si dirà che la forma normale è inadeguata perchè "la struttura dell'informazione strategica non è indipendente dagli stati di natura".

Poichè il gioco della figura 7 è a mosse simultanee, ogni risultato finale rivela le strategie dei giocatori. Il problema è che i giocatori non sono in grado di distinguere

"Pari o dispari aleatorio"

forma estesa



forma normale

1 \ 2	p	d
P	0,0	0,0
D	0,0	0,0

fig. 7

tra alcuni risultati finali. Se l'informazione finale fosse perfetta, ogni giocatore saprebbe perchè ha vinto o perso. Ma dall'informazione finale perfetta si può dedurre qualcosa di più: nel lungo periodo (cioè se si stabilisce un equilibrio strategico) la distribuzione di probabilità degli stati di natura viene esattamente individuata da ogni giocatore.

Lemma 3.0. Se (ς,σ) è un equilibrio congetturale strategico per il gioco Γ caratterizzato da un'informazione finale perfetta, allora per ogni $j\in I$ $r_j=r$.

Dimostrazione. Se l'informazione finale è perfetta, per ogni $j\in I$

e per ogni $z\in Z$ si ha $h_j^z(z)=\{z\}$; perciò la condizione di equilibrio strategico è

$$Pr\{z|\varsigma_j,\sigma_j\} = Pr\{z|\sigma\},\ z\in Z,\ j\in I.$$

Per ogni w assegnato si somma membro a membro rispetto a tutti gli $z\in Z(w)$ e si ottiene

$$r_j(w) = \Sigma_{z\in Z(w)}Pr\{z|\varsigma_j,\sigma_j\} = \Sigma_{z\in Z(w)}Pr\{z|\sigma\} = r(w),\ w\in W,\ j\in I.$$

∎

Gli esempi visti sopra mostrano le principali carenze informative della forma normale ai fini della definizione degli equilibri congetturali. Tali carenze impediscono di scoprire altri equilibri oltre a quelli (di Nash) che si possono ricavare dalla forma normale.

In quanto segue si cercherà di eliminare queste carenze o almeno di delimitare i casi in cui sono irrilevanti.

Tuttavia la conoscenza della forma estesa può permettere anche di "restringere" l'insieme degli equilibri, mostrando che alcuni di essi non sono plausibili. Ad esempio si può sostenere che l'unico equilibrio plausibile del gioco di minaccia è quello perfetto, perchè la forma estesa del gioco mostra che la minaccia non è credibile. Naturalmente la forma normale del gioco non permette di distinguere tra minacce o promesse credibili e non credibili.I problemi di questo tipo, che riguardano la discussione critica delle congetture e la loro compatibilità con le informazioni dei giocatori, saranno trattati più avanti (paragrafi 4.5 e 4.6).

3.7. Rappresentazioni in forma strategica.

Si definiscono ora alcuni concetti che fanno da "ponte" tra forma estesa e forma normale.

Funzione degli esiti finali: è una applicazione $f:W\times S\to Z$, che assegna un esito z a ogni coppia (w,s), dove $s\in S$ è una n-upla di strategie e $w\in W$ è un nodo iniziale o stato di natura del gioco. Si costruisce la funzione f(.) partire dalla forma estesa con un procedimento così schematizzato:

$w \to i(w) \to \alpha^{-1}(s_{i(w)}(H(w))) \to$ esiste un solo x tale che $x\in\alpha^{-1}(s_{i(w)}(H(w)))\cap S(w)$ (per ipotesi α è biunivoca su $S(t)$ $t\in T$) $\to x \to i(x) \to y\in\alpha^{-1}(s_{i(x)}(H(x)))\cap S(x) \to \ldots\ldots\ldots\ldots$
$\ldots \to z\in\alpha^{-1}(s_{i(t)}(H(t)))\cap S(t)$, con $w=p_{1(z)}(z)$ e $z\in Z$.

Lo schema significa semplicemente questo: il nodo finale z viene selezionato partendo dal suo (unico) predecessore iniziale $w=p_{1(z)}(z)$ e scegliendo ogni arco corrispondente all'azione prescritta dalla strategia rilevante.

Definizione 3.15. Si definisce funzione degli esiti finali una applicazione $f:W\times S\to Z$ tale che

a) $f(w,s)\in Z(w)$

b) se $z=f(w,s)$ e $x\in P(z)$, allora $s_{i(x)}(H(x))=\alpha(s(x,z))$.

Si supponga che un osservatore esterno segua tutto lo svolgimento del gioco. Non leggendo nel pensiero dei giocatori, l'unica informazione che egli può ottenere sulle strategie da essi seguite è quella data dagli eventi z. L'esito z è compatibile con un unico w (perchè T è una arborescenza) e, noto w, di norma esistono più s che producono z. La partizione dell'insieme S, che si ottiene assegnando a ogni z l'insieme delle coppie (w,s) che possono averlo prodotto, è chiamata "struttura dell'informazione empirica del gioco in forma seminormale". L'attributo "empirica" è dovuto al fatto che tale ripartizione si basa solo sui risultati osservabili z; l'espressione "seminormale" è usata perchè si fa riferimento alle strategie, come nei giochi in forma normale, ma in più si tiene conto degli stati di natura e della impossibilità di distinguere tra certe strategie in base alle osservazioni.

Definizione 3.16. Si definisce **struttura dell'informazione empirica del gioco in forma semi-normale** una partizione dello spazio WxS data da una corrispondenza H_0^{sN}:WxS->WxS (ossia da una applicazione da WxS in $2^{(WxS)}$), ricavabile dalla forma estesa come segue:

(3.22) $H_0^{sN}(w,s)=f^{-1}(f(w,s))$.

Ma le informazioni relative alle strategie che possono ottenere i giocatori sono in generale diverse da quelle che può ottenere un osservatore esterno, perchè non sempre essi sono in grado di distinguere tra due diversi risultati. Quindi per ogni giocatore va definita una particolare struttura dell'informazione strategica.

Definizione 3.17. Si definisce **struttura dell'informazione strategica di j** la partizione di WxS indotta da una corrispondenza H_j^{sN}:WxS->WxS ottenibile mediante l'uguaglianza

(3.23) $H_j^{sN}(w,s)=f^{-1}[h_j^{z}(f(w,s))]$.

Si consideri ora l'insieme così definito

$H_j^{sN}(w,s)|w$:={s'εS: (w,s')ε$H_j^{sN}(w,s)$},

per ogni w la collezione degli $H_j^{sN}(w,s)|w$ è una partizione di S (derivata dalla partizione di WxS indotta da H_j^{sN}), che rappresenta la struttura dell'informazione strategica di j, noto w. Supponiamo ora che le H_j^{sN} siano tali che

(3.24) $H_j^{sN}(w,s)|w=H_j^{sN}(w',s)|w'$, (w,w',s)εWxWxS, jεI, si dirà allora che "la struttura dell'informazione strategica è_indipendente dagli stati di natura", perchè nessun giocatore ricava maggiori informazioni sulle strategie altrui dalla conoscenza dello stato di natura.

Definizione 3.18. Si dice che la struttura dell'informazione strategica è indipendente dagli stati di natura se vale la (3.24).

Si è visto che nel gioco del "pari o dispari aleatorio" la struttura dell'informazione strategica non è indipendente dagli stati di natura. Nella figura 8 sono rappresentati due giochi, Γ e Γ', che differiscono soltanto per un particolare: in Γ i due nodi decisionali x_1 e x_2 appartengono allo stesso insieme d'informazione (h_3), mentre in Γ' costituiscono due insiemi d'informazione diversi. Da ciò consegue che, mentre la struttura dell'informazione strategica in Γ è indipendente dagli stati di natura, in Γ' non lo è.

In base alla funzione degli esiti finali si può ricavare una funzione di guadagno che assegna i guadagni dei vari giocatori a ogni coppia (w,s). Anche in questo caso, data la presenza degli stati di natura, si usa l'espressione "seminormale".

Definizione 3.19. E' detta funzione di payoff in forma semi-normale l'applicazione u^N:$W\times S\to R^n$ così definita:

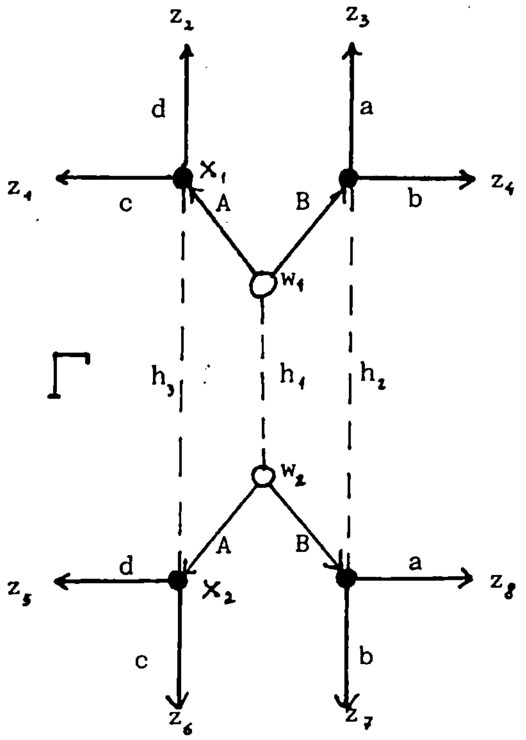
$$(3.25) \quad u^{*N}(w,s):=u(f(w,s)).$$

Dalle (3.17), (3.22), (3.23), (3.25), risulta che H^{*N} deve essere una sottopartizione della partizione indotta da $(u^{*N})^{-1}$e H_j^{*N} deve essere una sottopartizione della partizione indotta da $(u_j^{*N})^{-1}$.

Ciò significa semplicemente che i giocatori deducono dal guadagno ricevuto tutte le informazioni possibili.

Sulla funzione di payoff in forma normale non c'è bisogno di dare particolari spiegazioni: si tratta della applicazione che assegna i guadagni attesi dei vari giocatori a ogni

Struttura dell'informazione strategica in due giochi a informazione finale perfetta.



h_1	h_2	h_3		w_1	w_2
A	a	c		z_1	[illegible]
A	a	d		z_2	z_5
A	b	c		z_1	[illegible]
A	b	d		z_2	z_5
B	a	c		z_3	z_8
B	a	d		z_3	z_8
B	b	c		z_4	z_7
B	b	d		z_4	z_7

La struttura dell'informazione strategica in Γ è indipendente dagli stati di natura.

La struttura dell'informazione strategica in Γ' non è indipendente dagli stati di natura.

h_1	h_2	x_1	x_2	w_1	w_2
A	a	c	e	z_1	z_5
A	b	c	e	z_1	[illegible]
A	a	c	f	z_1	z_6
A	b	c	f	z_1	z_6
A	a	d	e	z_2	[illegible]
A	b	d	e	z_2	[illegible]
A	a	d	f	z_2	z_6
A	b	d	f	z_2	z_6
B	a	c	e	z_3	z_8
B	a	c	f	z_3	z_8
B	a	d	e	z_3	z_8
B	a	d	f	z_3	z_8
B	b	c	e	z_4	z_7
B	b	c	f	z_4	z_7
B	b	d	e	z_4	z_7
B	b	d	f	z_4	z_7

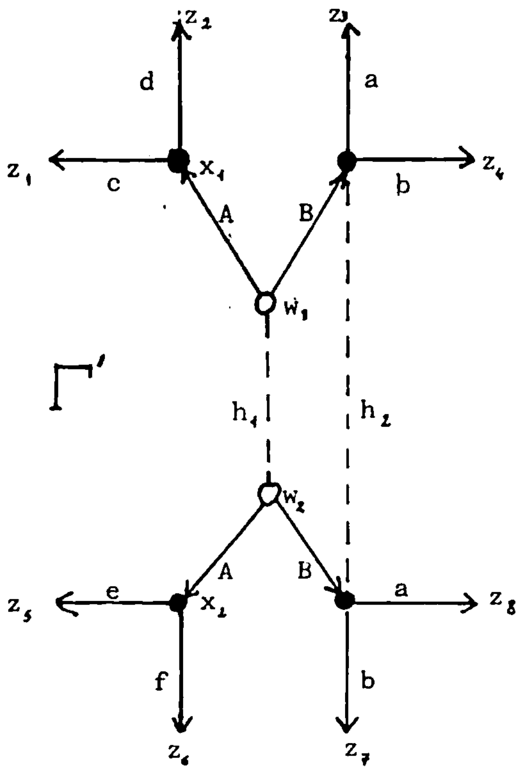


fig. 8

n-upla di strategie pure. Tali guadagni sono calcolati mediante la distribuzione di probabilità oggettiva degli stati di natura.

Definizione 3.20. E' detta **funzione di payoff in forma normale** l'applicazione $u^N:S\to R^n$ così definita

(3.26) $u^N(s)=\Sigma_{w\in W}u(f(w,s))r(w)$.

D'ora in poi gli apici ".N" saranno tralasciati, se sarà chiaro a quale forma ci si sta riferendo.

Quando il gioco Γ è tale che alla fine di ogni partita ogni giocatore è in grado di capire quale stato di natura si è determinato e quali strategie hanno adottato gli altri giocatori, si dice che esiste una "rivelazione completa".

Definizione 3.21. Si dice che Γ è un gioco a **rivelazione completa** se $H_j(w,s)=\{w,s\}$, per ogni $j\in I$.

E' evidente che la rivelazione completa può aversi se e solo se la funzione degli esiti finali f(.) è biunivoca e l'informazione finale è perfetta.

I concetti sopra definiti verranno utilizzati per tre tipi di rappresentazioni in forma strategica: la forma normale, la forma "quasi normale" e la forma "semi normale". Le ultime due rappresentazioni differiscono dalla forma normale perchè introducono degli elementi in più nella descrizione del gioco. Nella **forma quasi normale** si specifica per ogni giocatore e per un immaginario osservatore esterno quali sono le informazioni strategiche deducibili dal risultato del gioco. Nella **forma semi normale** si aggiunge l'ulteriore elemento degli stati di natura.

Definizione 3.22. Si dice **gioco in forma normale** una tripletta $\Gamma=(I,S,u)$, dove $I=\{1,2,...n\}$ è l'insieme dei giocatori, $S=S_1xS_2x...xS_n$ è il prodotto cartesiano degli spazi delle loro strategie pure e $u:S\to R^n$ è la funzione di payoff.

Si dice **congettura in forma normale di j** una applicazione $c_j^N: S^j x S_j \to [0,1]$, che assegna a ogni strategia pura di j una distribuzione di probabilità su $S^j := (\underset{k \in I \setminus \{j\}}{x} S_k)$.

Il passaggio dalla forma estesa Γ alla forma normale Γ^N di un gioco dato è lecito se Γ è a rivelazione completa e se $r(w)=r_j(w)$. La prima condizione garantisce che Γ^N contiene tutti gli elementi rilevanti dal punto di vista dell'informazione dei giocatori. La seconda condizione garantisce che la funzione di payoff in forma normale sia quella rilevante per descrivere le preferenze dei giocatori sullo spazio S. Se r è nota, non si perde in generalità ponendo $r(w)>0$ per ogni $w \in W$; infatti gli alberi, la cui radice w ha probabilità nulla, sono completamente irrilevanti nel determinare le scelte dei giocatori per il resto del gioco. In questo caso le congetture in forma normale possono essere derivate da quelle in forma estesa mediante la seguente uguaglianza:

(3.27) $c_j^N(s^j | s_j) = Pr\{f(w, s^j, s_j) | c_j, s_j\} / r(w)$,

Il postulato di razionalità va appositamente riformulato per ogni rappresentazione in forma strategica, specificando come si calcola l'utilità attesa e che forma ha il criterio di rifiuto (strategico ovviamente).

(R) **Ipotesi di razionalità miope:** ogni j, data c_j sceglie una σ_j^* tale che

$E(u_j | c_j, \sigma_j^*) \geq E(u_j | c_j, \sigma_j)$, $\sigma_j \in \Sigma$, avendo posto

(3.28) $E(u_j | c_j, \sigma_j) := \Sigma_{s \in S} c_j(s^j | s_j) \sigma_j(s_j) u_j(s), \sigma_j \in \Sigma_j$

Definizione 3.23. E' detta criterio di rifiuto in forma normale di j l'applicazione $Cr_j: Ç x \Sigma \to \{0,1\}$ così definita:

$$(3.29) \quad Cr_j(c_j, \sigma) = \begin{cases} 1, & c_j(s^j | s_j) \sigma_j(s_j) = \Pi_{k \in I} \sigma_k(s_i), \ s \in S \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La prima innovazione che si introduce rispetto alla forma strategica standard è la specificazione della struttura dell'informazione strategica. Questa si configura come una serie di $(n+1)$ partizioni dell'insieme delle combinazioni di strategie S. La partizione con indice 0 è quella oggettiva; cioè quella relativa a un generico osservatore esterno. Le partizioni con indice $j=1,2...n$ riguardano i giocatori. Quando due n-uple di strategie s e s' appartengono alla stessa casella rispetto alla partizione di indice j, significa che j non è in grado di distinguere tra le due n-uple in base alle informazioni di cui può disporre. Naturalmente ogni giocatore j "conosce" la propria strategia (ma si tenga conto che la definizione di una strategia su insiemi d'informazione per essa irrilevanti è un artificio matematico), perciò la partizione per lui rilevante è la "proiezione" della partizione data sull'insieme delle combinazioni di strategie altrui S^j, avendo fissato la propria strategia s_j.

Come sempre le partizioni vengono rappresentate tramite corrispondenze. Quando si parla di una partizione di Y si intende perciò una corrispondenza $H:Y=>Y$ ovvero una applicazione $H:Y->2^Y$ che soddisfa i seguenti requisiti:

a) $y \in H(y)$ per ogni $y \in Y$
b) $H(y)=H(y')$ oppure $H(y) \cap H(y')=\emptyset$ per ogni $(y,y') \in Y^2$
c) $\cup_{y \in Y} H(y)=Y$

Definizione 3.24. Un gioco in forma quasi-normale (qN) è una quadripletta $\Gamma=(I,S,H,u)$, dove H è una $(n+1)$-upla di partizioni di S $H_i:S=>S$ che rappresentano la struttura dell'informazione empirica del gioco $(i=0)$ e la struttura dell'informazione strategica dei giocatori $(i \in I)$. H gode delle seguenti proprietà:

$$H_0(s) \text{ incluso in } u^{-1}(u(s)), H_j(s) \text{ incluso in } u_j^{-1}(u_j(s)), \tag{3.30}$$
$$H_0(s) \text{ incluso in } H_j(s),\ j \in I,\ s \in S.$$

Una congettura in forma quasi normale di j è una applicazione che assegna a ogni strategia pura s_j di j una distribuzione di probabilità sull'insieme $H_j(S)|s_j$, che corrisponde alla partizione di S^j generata da H_j, data s_j:

$$
\begin{aligned}
&H_j(s)|s_j := \{s^{j\prime} \in S^j :\ (s^{j\prime}, s_j) \in H_j(s)\} \\
&H_j(S)|s_j := \{H_j(s^{j\prime}, s_j)|s_j,\ s^{j\prime} \in S_j\} \\
&P[H_j(S)|s_j] := \{p : H_j(S)|s_j \to [0,1],\ \Sigma p(.) = 1\} \\
&c_j : S_j \to \bigcup_{s_j \in S_j} P[H_j(S)|s_j]
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

Il complesso delle (3.31) è solo formalmente complicato: si afferma in sostanza che j assegna delle probabilità soggettive a quelli che per lui sono degli eventi elementari condizionati dalla sua strategia; tali eventi condizionati sono rappresentati dagli insiemi $H_j(s)|s_j$ inclusi in S^j. Infatti ai fini della massimizzazione dell'utilità attesa e del controllo delle congetture è necessario e sufficiente che j assegni probabilità a quegli eventi che potrà riconoscere alla fine del gioco, condizionati dalla scelta della sua strategia. Il criterio di rifiuto di j è tale da rigettare la congettura c_j se la distribuzione di probabilità soggettiva da essa derivata, data la strategia mista adottata da j, non coincide con la distribuzione di probabilità oggettiva che j "può osservare" alla fine della partita.

Definizione 3.25. E' detta **criterio di rifiuto di j in forma quasi normale** l'applicazione $Cr_j : Ç \times \Sigma \to \{0,1\}$ così definita:

$$
Cr_j(c_j, \sigma) := \begin{cases} 1, & c_j(H_j(s)|s_j)\sigma_j(s_j) = \\ & = \left(\sum_{s^{j\prime} \in H_j(s)|s_j} \Pi_{i \in I \setminus \{j\}} \sigma_i(s_i')\right)\sigma_j(s_j),\ s \in S \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}
\tag{3.32}
$$

Il passaggio dalla forma estesa a quella quasi normale di un gioco è lecito solo se la struttura dell'informazione è indipendente dagli stati di natura (cioè se vale la (3.24)); in tal caso H si deriva dalla forma estesa mediante le uguaglianze:

$$H_0(s')=\{s\epsilon S:(\text{esiste } w\epsilon W:\ (w,s)\epsilon f^{-1}(f(w,s'))\ )\}$$

(3.33)

$$H_j(s')=\{s\epsilon S:(\text{esiste } w\epsilon W:\ (w,s)\epsilon f^{-1}(h_j{}^{f}(f(w,s')))\ )\}$$

E' inoltre opportuno ipotizzare che i giocatori conoscano la distribuzione degli stati di natura r, altrimenti la funzione di payoff in forma normale potrebbe essere irrilevante per descrivere le preferenze dei giocatori sull'insieme S (si vedrà più avanti con un esempio che la rappresentazione in forma quasi normale può essere appropriata anche se r non è nota, purchè la funzione di payoff in forma seminormale sia costante su opportuni insiemi, ma è meglio non complicare ulteriormente le condizioni di rappresentazione).

Come si è già accennato , se $r=r_j$, non si perde in generalità ipotizzando che sia $r:W\to(0,1]$, infatti se per qualche w fosse $r(w)=0$,si potrebbe ottenere da Γ un gioco Γ', eliminando da T w e i suoi successori; essendo gli esiti $z\epsilon Z(w)$ del tutto irrilevanti ai fini della massimizzazione dell'utilità attesa, Γ'risulterebbe del tutto equivalente a Γ.

Ciò precisato, si può ottenere la congettura in forma quasi normale $c_j{}^{qN}$ dall'uguaglianza

$$(3.34)\qquad c_j{}^{qN}(H_j(s)|s_j)=\sum_{s^{j}{}'\epsilon H_j(s)|s_j} Pr\{f(w,s^{j}{}',s_j)|c_j,s_j\}/r(w)$$

Grazie alla (3.30) per ogni s $u_j(s)$ è costante su $H_j(s)$ e, data s_j, su $H_j(s)|s_j$. Ciò riflette semplicemente il fatto che i giocatori traggono informazioni sullo svolgimento del gioco dal payoff ricevuto. Comunque ci si avvale di tale proprietà per definire un insieme di "rappresentanti" della partizione H_j che consente di semplificare la rappresentazione dell'utilità attesa. Per ogni j si seleziona da S un suo sottoinsieme finito R_j tale che

(a) $(s,s')\epsilon R_jxR_j$ implica ($H_j(s)=H_j(s')$ se e solo se $s=s'$)

(b) $\bigcup_{s\epsilon R_j} H_j(s)=S$

Si definisce inoltre la proiezione di $H_j(s)$ su S_j:

$S_j(s):=\{s_j'\epsilon S_j:(\text{esiste } s^{j\prime}:(s^{j\prime},s_j')\epsilon H_j(s))\}$

Ne risulta che l'utilità attesa di j, date la sua congettura e la sua strategia mista, è

$$(3.35)\quad E(u_j|c_j,\sigma_j):=\sum_{s\epsilon R_j}\Big(\sum_{s_j'\epsilon S_j(s)} c_j(H_j(s)|s_j')\sigma_j(s_j')\Big)u_j(s)$$

Consideriamo ora una rappresentazione di un gioco sempre derivabile dalla sua forma estesa: si tratta della rappresentazione in forma semi normale, nella quale sono considerati anche gli stati di natura.

Definizione 3.26. Si dice che Γ è in forma seminormale se è dato da $\Gamma=(I,S,W,H,r,u)$, dove W è un insieme finito di stati di natura w, su cui è definita una distribuzione di probabilità $r:W\text{->}[0,1]$, H è una (n+1)-upla di partizioni di WxS, $H_k:WxS\text{->}WxS$, che rappresenta la struttura dell'informazione empirica del gioco (k=0) e la struttura dell'informazione strategica dei giocatori ($k\epsilon I$), $u:WxS\text{->}R^n$ è la funzione di payoff. H gode delle seguenti proprietà

$$(3.36)\quad \begin{array}{l} H_o(w,s) \text{ incluso in } u^{-1}(u(w,s)), \\ H_j(w,s) \text{ incluso in } u_j^{-1}(u_j(w,s)), \\ H_o(w,s) \text{ incluso in } H_j(w,s),\ (w,s)\epsilon WxS,\ j\epsilon I. \end{array}$$

Una **congettura in forma seminormale** di j è una applicazione che assegna a ogni $s_j\epsilon S_j$ una distribuzione di probabilità sull'insieme $H_j(WxS)|s_j$, i cui elementi sono gli insiemi $H_j(w,s)|s_j=\{(w',s^{j\prime})\epsilon WxS^j:(w',s^{j\prime},sj)\epsilon H_j(w,s)\}$.

La forma seminormale è sempre derivabile da quella estesa tramite le (3.22), (3.23), (3.25) e c_j^{*N} si ricava ponendo

$$(3.37)\quad c_j^{*N}(H_j(w,s)|s_j)=Pr\{h_j^{f}(f(w,s))|\varsigma_j,s_j\}$$

Analogamente a quanto visto per i giochi in forma quasi normale, grazie alla (3.36) u_j è costante su $H_j(w,s)$ e, data s_j, su $H_j(w,s)|s_j$. Si costruisce allora l'insieme R_j di "rappresentanti" della partizione tale che (a') $(w',s',w,s)\epsilon R_j x R_j$ implica $(H_j(w,s)=H_j(w',s')$ se e solo se $(w,s)=(w',s')$,

(b') $\bigcup_{(w,s)\epsilon R_j} H_j(w,s)=WxS$,

nonchè l'insieme $S_j(w,s)=\{s_j':(\text{esiste } (w',s^{j}'):(w,s)'\epsilon H_j(w,s))\}$.

L'utilità attesa di j, date c_j e σ_j, è allora

$$(3.38)\quad E(u_j|c_j,\sigma_j)=\sum_{(w,s)\epsilon R_j}\Big(\sum_{s_j'\epsilon S_j(w,s)} c_j(H_j(w,s)|s_j')\sigma_j(s_j')\Big)u_j(w,s)$$

Definizione 3.27. E' detta **criterio di rifiuto di j in forma seminormale** l'applicazione così definita

$$(3.39)\quad Cr_j(c_j,\sigma)=\begin{cases}1, & \text{se } c_j(H_j(w,s)|s_j)\sigma_j(s_j)= \\ & =\Big(\sum_{(w',s^{j}')\epsilon H_j(w,s)|s_j}\Pi_{i\epsilon I\setminus(j)}\sigma_i(s_i')\Big)\sigma_j(s_j), \\ & \text{per ogni } (w,s)\epsilon WxS \\ 0, & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

Le definizioni relative alla forma seminormale sono del tutto analoghe a quelle date per la forma quasi normale e quindi non ci si dilunga a commentarle.

Nei giochi in forma quasi-normale e semi-normale l'ipotesi di razionalità miope diventa:

(R) ogni $j\epsilon I$, per una data c_j, sceglie una $\sigma_j^*\epsilon\Sigma_j$ tale che:

$$(3.40)\quad E(u_j|c_j,\sigma_j^*)\geq E(u_j|c_j,\sigma_j),\quad \sigma_j\epsilon\Sigma_j.$$

Le corrispondenze ottenute assegnando a c l'insieme delle σ^* che soddisfano la (3.28) o la (3.40) saranno indicate con la notazione $\Sigma^*(c)$ o eventualmente $\Sigma^{N*}(c)$, quando si vorrà distinguere dalla corrispondenza relativa al gioco in forma estesa.

La condizione di equilibrio per i tre tipi di giochi definiti sopra è che (c,σ) soddisfi

$$(3.41)\quad \pi_{j\in I} Cr_j(c_i,\sigma)=1,\ \sigma\in\Sigma^*(c).$$

In precedenza sono state date delle condizioni sufficienti affinchè un gioco in forma estesa possa essere rappresentato in forma normale e quasi-normale; sono state inoltre fornite le relazioni matematiche tra i concetti relativi alla forma estesa e quelli relativi alle forme strategiche. Ricapitolando:

- se Γ è un gioco in forma estesa a **rivelazione completa** e con $r:W\to(0,1]$ nota ai giocatori, si può assegnare a Γ un gioco in forma normale $\Gamma^N=g_1(\Gamma)$ tramite la (3.26); si può inoltre assegnare a ogni ç relativa a Γ una $c^N=g_1{}^c$(ç) tramite la (3.27);

- se Γ è tale che **la struttura dell'informazione strategica è indipendente dagli stati di natura** e $r:W\to(0,1]$ è nota ai giocatori, si può assegnare a Γ un gioco in forma quasi normale $\Gamma^{qN}=g_2(\Gamma)$ tramite le (3.26) e (3.33); si può inoltre assegnare a ogni ç relativa a Γ una $c^{qN}=g_2{}^c$(ç) tramite la (3.34);

-ad ogni gioco in forma estesa Γ si può assegnare un gioco in forma semi-normale $\Gamma^{sN}=g_3(\Gamma)$ tramite le (3.22), (3.23) e (3.25); si può inoltre assegnare a ogni ç relativa a Γ una $c^{sN}= g_3{}^c$(ç) tramite la (33);

- si ricorda che l'ipotesi di memoria perfetta rende equivalenti le due definizioni di strategia mista date in precedenza; una strategia mista per un gioco in forma (quasi o semi-) normale si ottiene da una strategia mista comportamentale come segue

$$(3.13)\quad \sigma_j{}^N(s_j)=\prod_{h\in H(x_j)}\sigma_j(s_j(h)),\ \text{da cui}\ \sigma_j{}^N=g_j{}^\sigma(\sigma_j)$$

- ovviamente le rappresentazioni in forma strategica g_k $(k=1,2,3)$ lasciano inalterati I e S.

3.8. Equivalenza tra forma estesa e forme strategiche, limiti di tale equivalenza e carenze della forma estesa.

Nel precedente paragrafo sono state definite le rappresentazioni in forma strategica g_k. Il problema è ora quello di mostrare l'equivalenza tra Γ e $g_1(\Gamma)$ nel dominio in cui g_1 è definita; tale equivalenza è ovviamente da intendersi nel senso degli equilibri congetturali, ovvero: $(ç,\sigma)$ è un equilibrio (strategico con criterio di rifiuto forte) per Γ se e solo se $(g_1^c(ç),g^c(\sigma))$ è un equilibrio per $g_1(\Gamma)$.

Prima di passare ai teoremi di g_1-equivalenza si dimostrerà un lemma che chiarisce le idee a proposito del passaggio dalla forma estesa a quella normale. In sostanza il lemma implica che una adeguata rappresentazione in forma normale è possibile solo se i giocatori muovono una volta sola e simultaneamente.

Se Γ è tale che per ogni $j \in I$ esiste un solo h incluso in $X^j \backslash X_{PI}$, diremo che Γ è un "gioco a mossa singola", perchè i giocatori possono scegliere tra più azioni non più di una volta durante il gioco e solo per un insieme prefissato di partite z. Tra gli esempi finora considerati solo quelli nelle figure III (in basso), IV e 8 non soddisfano questa condizione.

Definizione 3.28. Un gioco in forma estesa Γ si dice a mossa singola se per ogni giocatore $j \in I$ esiste un solo insieme d'informazione $h \in H(x_j)$ tale che h è incluso in $X_j \backslash X_{PI}$.

Se Γ è tale che per ogni partita $z \in Z$ tutti i giocatori riescono a giocare, cioè riescono a fare una vera scelta, si dice che Γ è uniformemente partecipativo. Tra gli esempi esaminati solo il gioco di minaccia (fig. 4) non soddisfa questa condizione.

Definizione 3.29. Un gioco in forma estesa Γ si dice uniformemente partecipativo, se per ogni $z \in Z$

$$i(P(z)\backslash X_{PI}) := \bigcup_{x \in P(z)\backslash X_{PI}} i(x) = I$$

Se un gioco Γ è sia a mossa singola, sia uniformemente partecipativo, significa che ogni giocatore ha a sua disposizione una e una sola scelta tra più azioni alternative qualsiasi sia lo svolgimento del gioco. In sostanza ciò equivale a dire che il gioco è a mosse simultanee, o almeno è come se lo fosse dal punto di vista della struttura dell'informazione.

Lemma 1. Condizione necessaria e sufficiente affinchè la funzione degli esiti finali $f:W\times S\to Z$ relativa a un gioco Γ sia biunivoca è che Γ sia un gioco a mossa singola e uniformemente partecipativo.

Dimostrazione. La condizione è necessaria; infatti si ipotizzi per assurdo che [a] Γ non sia a mossa singola e/o [b] Γ non sia uniformemente partecipativo, da entrambi i casi si dedurrà che f non è biunivoca; ciò equivale, per applicazione della prima legge delle inverse, alla implicazione che si vuole dimostrare.

[a] Esistono $j\in I, h', h''$ tali che $h'\cap h''=\emptyset$ e h', h'' inclusi in $(X^j\setminus X_{PI})$;sia $z=f(w,s^j,s_j)\in Z(h')$ e $s_j(h'')=a\in A(h'')$, essendo α biunivoca su $S(h'')$ (che ha più di un elemento), esiste $b\in A(h'')$, b diverso da a; si definisca s_j' come segue

$$s_j'(h)=\begin{cases} s_j(h), & h\cap h''=\emptyset \\ b, & h=h'' \end{cases}$$

ovviamente s_j è diverso da s_j'. Sono possibili tre casi:

[ai] $P(z)\cap h''=\emptyset$: evidentemente $f(w,s^j,s_j)=f(w,s^j,s_j')$,ma s_j è diverso da s_j' dunque f non è biunivoca;

[aii] $P(z)\cap h''=\{x\}$ e, posto $\{x'\}=P(z)\cap h'$, $x<x'$: vale uno dei due sottocasi seguenti

[aii'] esiste $x''\in h':P(x'')\cap\alpha^{-1}(b)=\{t\}$, allora per l'ipotesi di memoria perfetta $a=\alpha(s(x,z))=\alpha(t)=b$, assurdo;

[aii"] non esiste un x" definito come in [aii'], allora, posto $\{t_a\}=S(x)\cap\alpha^{-1}(a)$ e $\{t_b\}=S(x)\alpha^{-1}$, $Z(h')$ risulta incluso in $Z(t_a)$ e $Z(t_a) \cap Z(t_b)=\emptyset$; posto $s_j(h')=c \in A(h')$ esiste $d \in A(h')$, d diverso da c, quindi si può costruire una $s_j"$ diversa da s_j' ponendo

$$s_j"(h)=\begin{cases} s_j'(h), & h \cap h'=\emptyset \\ d, & h=h' \end{cases}$$

ne segue che $f(w,s^j,s_j')=f(w,s^j,s_j")$ (perchè le due strategie si differenziano solo su h', che non è attraversato dal percorso in questione), quindi f non è biunivoca;

[aiii] $P(z) \cap h"=\{x\}$ e $x'<x$: analogamente al caso [aii] si dimostra che o si viola l'ipotesi di memoria perfetta o si può costruire una variante di s_j in modo tale che f risulta non biunivoca;

[b] esistono $j \in I$ e $z \in Z$ tali che j non appartiene a $i(P(z) \setminus X_{PI})$; segue che per la (0) (secondo cui ogni giocatore dispone di più di una strategia) esiste h_o incluso in $(X^j \setminus X_{PI})$ tale che $z \in Z \setminus Z(h_o)$, poichè $A(h_o)$ contiene almeno due azioni differenti, è possibile, col solito metodo, costruire due diverse strategie di j che, unitamente a w e s^j opportuni, mappano in z tramite f e quindi f risulta non biunivoca.

La dimostrazione della condizione sufficiente è banale e viene lasciata al lettore. ∎

Questo lemma, oltre che essere di per se stesso interessante, è utile per dimostrare il primo teorema di equivalenza (sarà anche utilizzato nel prossimo capitolo per dimostrare il teorema 4.2).

Teorema 1. Sia Γ un gioco in forma estesa a rivelazione completa e sia $r:W\to(0,1]$ nota ai giocatori, allora $(ç,\sigma)$ è un equilibrio strategico (con criterio di rifiuto forte) per Γ se e solo se $(g_1^c(ç),g^\sigma(\sigma))$ è un equilibrio per $\Gamma^N=g_1(\Gamma)$.

Dimostrazione. Sia $(ç,\sigma)$ un equilibrio come nell'enunciato; poichè vi è perfetta informazione finale, dalle (3.18) e (3.20) segue

[1] $\Pr\{z|ç_j,\sigma_j\}=\Pr\{z|\sigma\}$, $z\epsilon Z, j\epsilon I$,

inoltre , essendo f biunivoca, per il lemma 1 si ha $X^j\backslash X_{PI}=h_j\epsilon H(X^j)$, per cui è lecito porre $\{t_j(z)\}=h_j\cap P(z)$.

Tenendo conto che $r_j=r>0$, la [1] equivale a

$$\pi_{i\epsilon I\setminus\{j\}}c_j[s(t_i(z),z)|t_i(z))]\sigma_j[\alpha(s(t_j(z),z))]=$$
$$=\pi_{j\epsilon I}\sigma_j[\alpha(s(t_j(z),z))],\ z\epsilon Z,\ j\epsilon I.$$

Posto $z=f(w,s)$, $c^N=g_1{}^c(ç)$, $\sigma^N=g^\sigma(\sigma)$, dalle (3.27) e (3.13) segue che [1] equivale a

[2] $c_j{}^N(s^j|s_j)\sigma_j{}^N(s_j)={}_{i\epsilon I}\sigma_i(s_i)$, $s\epsilon S$, $j\epsilon I$.

Basta allora dimostrare l'equivalenza tra le espressioni dell'utilità attesa per ottenere l'equivalenza tra le condizioni di equilibrio.

Mantenendo la posizione $z=f(w,s)$ e ricordando la (3.26) si ha

$$\Sigma_{z\epsilon Z}\Pr\{z|ç_j,\sigma_j\}u_j(z)=\Sigma_{w\epsilon W}\Sigma_{s\epsilon S}\Pr\{f(w,s)|ç_j,\sigma_j\}u_j(f(w,s))=$$
$$=\Sigma_{w\epsilon W}r(w)\Sigma_{s\epsilon S}(\Pr\{f(w,s)|ç_j,s_j\}/r(w))\sigma_j(s_j(h_j))u_j(f(w,s))=$$
$$=\Sigma_{s\epsilon S}c_j{}^N(s_j|s_j)\sigma_j{}^N(s_j)u_j{}^N(s),\ j\epsilon I.$$

Ne segue l'equivalenza tra $\sigma\epsilon\Sigma^*(ç)$ e $\sigma^N\epsilon\Sigma^*(c^N)$ e quindi tra le condizioni di equilibrio. ▮

Il seguente teorema mostra l'equivalenza tra forma estesa e forma quasi normale.

Teorema 2. Sia Γ un gioco finito in forma estesa con struttura dell'informazione strategica indipendente dagli stati di natura e con $r:W\to(0,1]$ nota agli agenti, allora $(ç,\sigma)$ è un equilibrio strategico (con criterio di rifiuto forte) per Γ se e solo se $(g_2{}^c(ç),g^\sigma(\sigma))$ è un equilibrio per $\Gamma^N=g_2(\Gamma)$.

Dimostrazione. Sia $(ç,\sigma)$ un equilibrio come definito nell'enunciato, vale allora

$$[1]\ \Pr\{h_j{}^{x}(z_o)\,|\,\sigma\}=\Pr\{h_j{}^{x}(z_o)\,|\,\varsigma_j,\sigma_j\},\quad z_o\epsilon Z,\ j\epsilon I.$$

Per le (3.8) e (3.10) ricordando che $r_j=r$, la [1] equivale a

$$\sum_{z\epsilon h_j{}^{x}(z_o)} r(p_{l(x)}(z))\prod_{l=1}^{l=l(x)}\sigma_{i(p(l))}[\alpha(p_{l-1}(z))]=$$

$$=\sum_{z\epsilon h_j{}^{x}(z_o)} r(p_{l(x)}(z))\prod_{x\epsilon X^j{}_x} c_j(s(x,z)\,|\,x)\prod_{x\epsilon(X_j)_x}\sigma_j[\alpha(S(x)_x)].$$

Riscriviamo il primo membro in modo simile al secondo:

$$\sum_{z\epsilon h_j{}^{x}(z_o)} r(p_{l(x)}(z)\prod_{x\epsilon X^j{}_x}\sigma_{i(x)}([\alpha(S(x)_x)]\prod_{x\epsilon(X_j)_x}\sigma_j[\alpha(S(x)_x)]$$

e consideriamo la proiezione di $f^{-1}(h_j{}^{x}(z_o))$ su S_j, cioè

$$S_j(z_o)=\{s_j\epsilon S_j:(\text{esiste } x\epsilon X:\{x\}=\alpha^{-1}(s_j(h))\cap P(z_o),h\epsilon H(X^j))\};$$

che detto insieme e detta proiezione coincidano si deduce dalla ipotesi (3.3) di memoria perfetta e dalla (3.17), secondo le quali gli insiemi delle strategie compatibili con un esito z e con un esito z' rispettivamente sono coincidenti se e solo se $z\epsilon h_j{}^{x}(z')$; si ricordi inoltre che dalla (3.13)

$$\prod_{x\epsilon(X_j)_x}\sigma_j[\alpha(S(x)_x)]=\prod_{x\epsilon X^j{}_x}\sigma_j[\alpha(S(x)_x)]\prod_{h\ \text{incl.in}\ X_j\setminus(X_j)_x}\Sigma_{a\epsilon A(h)}\sigma_j(a)=$$

$$=\sum_{s_j\epsilon S_j(z_o)}\sigma_j{}^{N}(s_j),\quad z\epsilon h_j{}^{x}(z_o),\quad \sigma^{N}=g_o(\sigma);$$

quindi la [1] può riscriversi come segue

$$\sum_{s_j\epsilon S_j(z_o)}\sigma_j{}^{N}(s_j)\sum_{z\epsilon h_j{}^{x}(z_o)} r(p_{l(x)}(z))\prod_{x\epsilon X^j{}_x}\sigma_{i(x)}[\alpha(S(x)_x)]=$$

$$=\sum_{s_j\epsilon S_j(z_o)}\sigma_j{}^{N}(s_j)\sum_{z\epsilon h_{jx}(z_o)} r(p_{l(x)}(z))\prod_{x\epsilon X^j{}_x} c_j(s(x,z)\,|\,x).$$

Si ponga $z_o=f(w_o,s^o)$, $z=f(w,s)$, e si considerino gli insiemi

$W_j(w_o,s_o)=\{w\epsilon W:(\text{esiste } s\epsilon S:(w,s)\epsilon H_j^{*N}(w_o,s^o))\}$,
$H_j^{*N}(w,s^o)|(w,s_j)=\{s^j\epsilon S^j:(s^j,s_j)\epsilon H_j^{*N}(w,s^o)|w\}$,

per semplicità e uniformità si scrive: $S_j(f(w_o,s^o))=S_j(w_o,s^o)$; si tenga conto inoltre che valgono le seguenti uguaglianze:

$$\prod_{x\epsilon X^j_z} c_j(s(x,z)|x)=\Pr\{f(w,s)|ç_j,s_j\}/r(w)$$

$$\prod_{x\epsilon X^j_z} \sigma_{i(x)}[\alpha(S(x)_z)]=\sum_{s^{j\prime}\epsilon H_j^{*N}(w,s)} \pi_{i\epsilon I\setminus\{j\}}\sigma_i^N(s_i');$$

si può allora riscrivere la [1] come segue

$$\sum_{s_j\epsilon S_j(w_o,s^o)} \sigma_j^N(s_j) \sum_{w\epsilon W_j(w_o,s^o)} r(w) \sum_{s^{j\prime}\epsilon H_j^{*N}(w,s^o)|(w,s_j)} \Pr\{f(w,s^{j\prime},s_j)|ç_j,s_j\}/r(w)=$$

$$=\sum_{s_j\epsilon S_j(w_o,s^o)} \sigma_j^N(s_j) \sum_{w\epsilon W_j(w_o,s^o)} r(w) \sum_{s^{j\prime}\epsilon H_j^{*N}(w,s^o)|(w,s_j)} \pi_{i\epsilon I\setminus\{j\}}\sigma_i^N(s_i').$$

Come si è visto sopra le somme in s_j sono un fattor comune che, se non è nullo, può essere semplificato; se è nullo allora $\sigma_j^N(s_j)=0$ per ogni $s\epsilon H_j^{qN}(s^o)$, dunque per tali s vale l'uguaglianza che fa accettare la congettura $g_{2j}^c(ç)$ (vd.(3.32)). Sfruttando l'ipotesi di indipendenza della struttura dell'informazione strategica dagli stati di natura, possiamo porre $H_j^{*N}(w,s)|(w,s_j)=H_j^{qN}(s)|s_j$; inoltre, essendo $z\epsilon h_j^f(z_o)$ e $z=f(w,s)$, risulta $H_j^{qN}(s)=H_j^{qN}(s^o)$ e per la (3.34) la somma in $s^{j\prime}$è uguale a $c_j^{qN}(H_j^{qN}(s)|s_j)$. E' ora evidente che anche. la somma in w può essere considerata un fattor comune ed eliminata dividendo membro a membro; inoltre è lecito moltiplicare ambo i membri per $\sigma_j(s_j)$, per cui si ha:

$$c_j^{qN}(H_j^{qN}(s)|s_j)\sigma(s_j)=(\sum_{s^{j\prime}\epsilon H_j^{qN}(s)|s_j} {}_{i\epsilon I\setminus\{j\}}\sigma_i(s_i))\sigma_j(s_j),s\epsilon H_j^{qN}(s^o)$$

Data l'arbitrarietà di j e z_o, per la (3.32) si ottiene infine

[2] $\Pi_{j\in I} Cr_j(g_{2j}^c(ç), g^o(\sigma))=1$.

La derivazione della [1] dalla [2] è sostanzialmente un processo a ritroso rispetto alla precedente dimostrazione e viene omessa. Meno banale è invece dimostrare l'equivalenza tra $\sigma\epsilon\Sigma^*(ç)$ e $g^o(\sigma)\epsilon\Sigma^{N*}(g_2^c(ç))$, ovvero tra le due espressioni dell'utilità attesa. .Anzitutto si definisce una famiglia $\{Z_j|w, w\epsilon W\}$ di insiemi di "rappresentanti" degli insiemi d'informazione finale di j, che si ottengono quando è noto $w\epsilon W$:

$Z_j|w$ è tale che

[a] $(z,z')\epsilon(Z_j|w)^2$ implica $(h_j^f(z)=h_j^f(z')$ se e solo se $z=z'$

[b] $\bigcup_{z\epsilon Z_j|w} (h_j^f(z)\cap Z(w)=Z(w)$

[c] $z\epsilon Z_j|w$ implica $z\epsilon h_j^f(z)\cap Z(w)$.

$$\Sigma_{z\epsilon Z}Pr\{z|ç_j,\sigma_j\}u_j(z)=\Sigma_{w\epsilon W}r(w) \sum_{z\epsilon Z_j|w} Pr\{h_j^f(z)|ç_j,\sigma_j\}u_j(z)=\ldots$$

ora, avendo posto $z=f(w,s)$, si costruisca una famiglia $\{R_j|w, w\epsilon W\}$ di insiemi di rappresentanti degli insiemi $H_j^{\bullet N}(w,s)|w$ in modo tale che due insiemi $H_j^{\bullet N}(w,s)|w$ e $H_j^{\bullet N}(w',s)|w'$ abbiano lo stesso rappresentante:

$R_j|w$ è tale che

[a'] $(s,s')\epsilon(R_j|w)^2$ implica $(H_j^{\bullet N}(w,s)|w=H_j^{\bullet N}(w,s')|w$ se e solo se $s=s')$

[b'] $\bigcup_{s\epsilon R_j|w} H_j^{\bullet N}(w,s)|w=S$

[c'] se $s\epsilon R_j|w$ allora $s\epsilon R_j|w'$, $(w,w')\epsilon W^2$

si noti che [c'] è compatibile con [a'] e [b'] grazie all'ipotesi di indipendenza della struttura dell'informazione strategica dagli stati di natura; segue che

$$\ldots=\Sigma_{w\epsilon W}r(w) \sum_{s\epsilon R_j|w} u(f(w,s)) \sum_{s'\epsilon H_j^{\bullet N}(w,s)|w} Pr\{f(w,s)|ç_j,\sigma_j\}/r(w)=$$

poiché $R_j|w=R_j|w'$ e $H_j^{\bullet N}(w,s)|w=H_j^{\bullet N}(w,s)|w'$

$$\ldots= \sum_{s\epsilon R_j^{aN}} [\Sigma_{w\epsilon W}r(w)u_j(f(w,s))] \sum_{s'\epsilon H_j^{aN}(s)} Pr\{f(w,s)|ç_j,\sigma_j\}/r(w)=$$

tenendo conto delle (3.34) e (3.26) e definendo $S_j(s)$ come nella (3.35)

$$\ldots = \sum_{s \in R_j^{qN}} \Big[\sum_{s_j' \in S_j(s)} c_j^{qN}(H_j^{qN}(s)\,|\,s_j')\,\sigma_j^N(s_j') \Big] u_j^N(s) =$$

$$= E(u_j^N\,|\,c_j^{qN}, \sigma_j^N).$$

Poichè entrambe le condizioni di equilibrio sono equivalenti vale la tesi. ∎

Teorema 3. Sia Γ un qualsiasi gioco finito in forma estesa, allora $(ç,\sigma)$ è un equilibrio per Γ se e solo se $(g_3^c(ç), g^\sigma(\sigma))$ è un equilibrio per $\Gamma^{*N} = g_3(\Gamma)$.

Vista la dimostrazione del teorema 2, quella del teorema 3 risulta banale e viene perciò omessa.

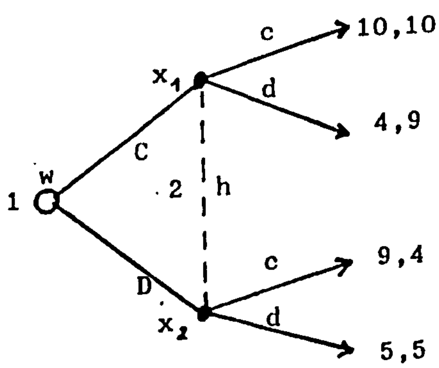
A questo punto è necessario precisare i limiti delle equivalenze espresse nei teoremi precedenti. Tali teoremi non affermano che a ogni equilibrio di un gioco in forma estesa corrisponde un equilibrio del suo trasformato (secondo g_1) in forma normale e viceversa. La seconda parte di questa affermazione infatti non è necessariamente vera. Per comprendere meglio il problema si esporrà dapprima un controesempio, dimostrando che un gioco in forma normale Γ^N può possedere un equilibrio congetturale, cui non corrisponde alcun equilibrio congetturale in qualsiasi gioco in forma estesa Γ tale che $\Gamma^N = g_1(\Gamma)$.

Si consideri il gioco Γ^N della fig.9, esso mostra una situazione in cui la mancanza di coordinazione tra due giocatori può generare un esito Pareto-inefficiente. Se le congetture dei giocatori sono "costanti", cioè corrispondono a una strategia dell'avversario (ad esempio perchè la struttura dell'informazione è "common knowledge"), sia l'esito efficiente sia quello inefficiente possono essere stabili (sono entrambi equilibri Nash in strategie pure) e se vi è possibilità di comunicazione tra i giocatori essi presumibilmente

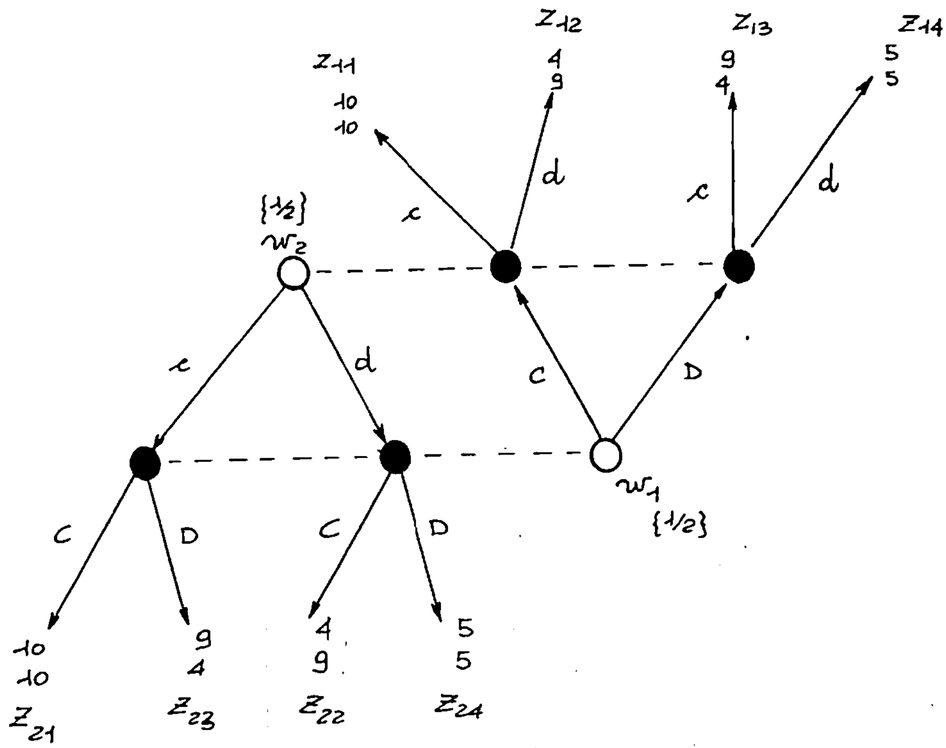
Γ^N

2 \ 1	c	d
C	10,10	4,9
D	9,4	5,5

$\Gamma \in g_1^{-1}(\Gamma^N)$



$\Gamma' \notin g_1^{-1}(\Gamma^N)$



$\mu(w_1) = 1/2$

$\mu_1(w_1) = 1$ $\qquad h_j^f(z_{ki})$

$\mu_2(w_1) = 0$

FIGURA 9

si accorderanno per produrre l'esito efficiente. Questo caso può essere ben rappresentato dal gioco in forma estesa Γ. L'inefficienza per mancanza di coordinazione potrà prodursi quando non vi è possibilità di comunicazione. In questo caso è anche concepibile che entrambi i giocatori non conoscano la struttura dell'informazione e facciano l'ipotesi di dover muovere per primi. Se la funzione di payoff, intesa come bimatrice, è nota e l'avversario è ritenuto razionale, ciò produrrà due congetture che assegnano alla strategia di j [k] una delle strategie miste di k [j] che massimizzano l'utilità di k data s_j [s_k]. Nell'esempio tali congetture sono uniche, perchè gli insiemi

$$\mathrm{ArgMax}_{t\in[0,1]}(u_j(sk,sj)t+uj(sk,sj)(1-t)),$$

cioè gli insiemi delle best-reply di j a k,contengono un unico elemento. Le congetture risultano non costanti per entrambi i giocatori. La congettura di 1 è della forma

$$c_1^N(c|.)=[(1,C),(0,D)],$$

quella di 2 è del tutto analoga:

$$c_2^N(C|.)=[(1,c),(0,d)].$$

Queste congetture generano un equilibrio (c^N;(C,c)),strategicamente equivalente all'equilibrio Nash efficiente (si sono indicate con le lettere "c" e "C" le azioni "cooperative"). Ma basta un occhiata al gioco Γ per capire che la coppia c^N non corrisponde a nessuna ç in Γ e più in generale che non esiste alcun Γ tale che $\Gamma^N=g_1(\Gamma)$ e tale che esista una coppia $ç\in Ç$, per la quale $g^{1c}(ç)=c^N$. Il motivo fondamentale è che ogni gioco in forma estesa ha una struttura sequenziale, che, nel caso di azioni simultanee è fittizia. Ciò è del tutto ininfluente se la struttura dell'informazione è specificata in modo opportuno ed è "common knowledge". In questo caso infatti è del tutto irrilevante l'ordine delle mosse. Ma se ci si limita, come in questa sede, all'ipotesi di informazione personale completa, lo spazio delle congetture compatibili con la conoscenza a priori dei giocatori è influenzato dall'ordine delle mosse. Ad esempio tutti i giocatori che non giocano per primi necessariamente ritengono la mossa di colui che gioca per primo indipendente dalle loro azioni. Nell'esempio della fig.9 il giocatore 2 in Γ può fare esclusivamente congetture che corrispondono all'adozione di una strategia mista fissata da parte di 1, non gli è possibile supporre di essere un leader alla Stackelberg. Solo per 1 ciò è possibile, perchè in Γ gioca per primo e non sa (con certezza) che x_1 e x_2 appartengono allo stesso insieme d'informazione h.

E' allora impossibile rappresentare con un gioco in forma estesa a informazione personale completa la situazione vista sopra con entrambi i giocatori che credono di essere leader ? Certamente no. Basta ricorrere all'espediente di trasformare l'informazione incompleta su certe caratteristiche di un dato gioco (in questo caso l'ordine delle mosse) in informazione imperfetta nell'ambito di un altro gioco in qualche senso equivalente al primo. Nella fig.9 Γ^N è adeguatamente rappresentato da Γ', costituito da due alberi analoghi a quello di Γ con un ordine di mosse invertito tra l'uno e l'altro. Quando gli tocca muovere 1 è convinto di essere nell'albero in cui gioca per primo ($r_1(w_1)=1$), ma in realtà può trovarsi anche sull'altro ($r(w_1)<1$). Per il giocatore 2 vale esattamente lo stesso discorso. Se né 1 né 2 conoscono la struttura dell'informazione l'uno dell'altro, allora per ognuno dei due è rilevante solo l'albero in cui crede di essere un leader. E' quindi possibile rappresentare la loro situazione di scelta mediante Γ^N e il relativo spazio delle congetture $Ç^N$. Naturalmente tale rappresentazione in forma normale è "non standard", non corrisponde a nessuna delle g_i definite sopra; infatti Γ^N appartiene solo al codominio di g_1, mentre Γ' appartiene solo al dominio di g_3.

Va però osservato che la struttura dell'informazione strategica in Γ' è indipendente dagli stati di natura. Il motivo è ovvio. Poichè Γ' è stato specificato per rappresentare il gioco in forma normale Γ^N, nel quale le mosse sono simultanee, e poichè gli stati di natura determinano solo l'ordine delle mosse in Γ', ne consegue che i giocatori non possono rendersi conto, in base al guadagno e alle azioni scelte,di quale sia stata la vera sequenza. In questo caso il fatto che i giocatori non conoscano la distribuzione di probabilità degli stati di natura è completamente irrilevante ai fini della rappresetntazione strategica.

Il gioco Γ' è un esempio di rappresentazione in forma estesa di un gioco a mosse simultanee, per il quale la forma normale è più che adeguata. L'esempio può essere generalizzato. Sia n il numero di giocatori in Γ^N. Allora la forma estesa deve avere n! stati di natura, cioè tanti quanti possono essere i possibili ordini delle mosse. Si indichino con w_j^k (k=1,2,...(n-1)!) gli stati di natura in cui j muove per primo. Si deve imporre che $\Sigma_k r_j(w_j^k)=1$ (ogni giocatore è convinto di giocare per primo). Con questo tipo di trasfomazione si ottiene uno spazio di congetture in forma estesa Ç isomorfo allo spazio delle congetture in forma normale.

L'accenno a questo tipo di trasformazione non è stato fatto per amore di generalizzazione, ma per mostrare che le condizioni di rappresentazione veramente importanti sono quelle sulla struttura dell'informazione (rivelazione completa, indipendenza dagli stati di natura). Le condizioni relative alla conoscenza di r potrebbero invece essere indebolite (imponendo che ogni giocatore assegni una probabilità uguale a quella "oggettiva" a ogni insieme dato dall'unione di tutti gli stati di natura tra i quali non può distinguere alla fine del gioco).

Ma piuttosto che definire nuove trasformazioni dalla forma estesa a quelle strategiche ci si accontenterà di tenere presente che i giochi in forma strategica sono parzialmente autonomi rispetto a quelli in forma estesa e che la scelta della forma va fatta in relazione alla situazione reale che si vuole descrivere, ivi comprese le conoscenze a priori degli agenti.

Nel prossimo capitolo saranno prevalenti i riferimenti alla forma estesa, perchè ciò permetterà un più efficace confronto tra la nozione di equilibrio qui espressa e quelle della letteratura corrente.

$\Sigma_k r_j(w_j^k) = 1$