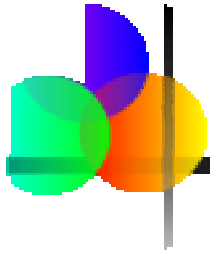
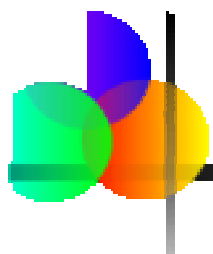


Statistica



Capitolo 4

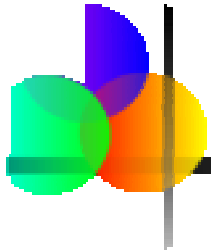
Probabilità



Obiettivi del Capitolo

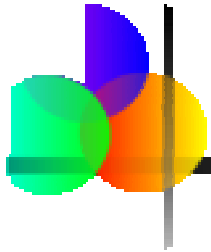
Dopo aver completato il capitolo, sarete in grado di:

- Spiegare concetti e definizioni fondamentali della probabilità
- Usare il diagramma di Venn o ad albero per illustrare semplici probabilità
- Applicare regole comuni di probabilità
- Calcolare probabilità condizionate
- Determinare se gli eventi sono statisticamente indipendenti
- Usare il teorema di Bayes per probabilità condizionate



Concetti Importanti

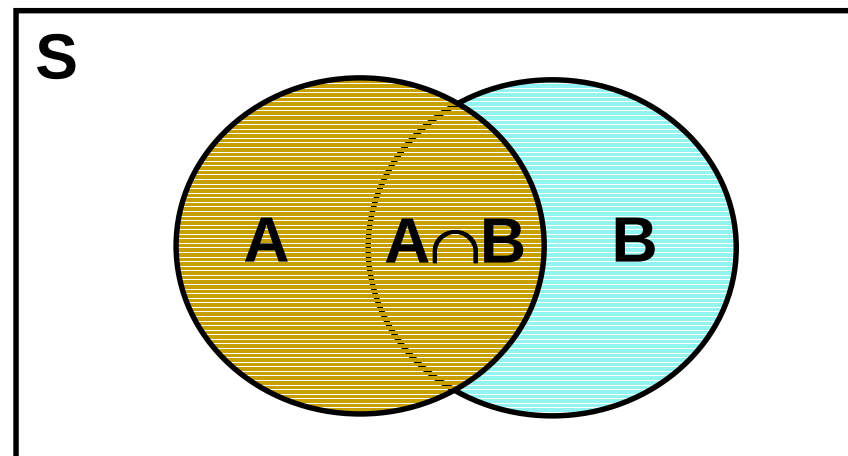
- **Esperimento aleatorio** – un processo che porta ad un risultato incerto
- **Evento elementare** – un possibile risultato di un esperimento aleatorio
- **Spazio Campionario** – l'insieme di tutti i possibili risultati di un esperimento aleatorio
- **Evento** – qualsiasi sottoinsieme di eventi elementari di uno spazio campionario

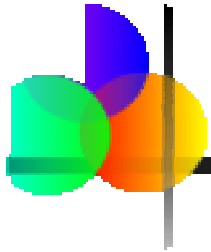


Concetti Importanti

(continuazione)

- **Intersezione di Eventi** – Se A e B sono due eventi in uno spazio campionario S , allora l'intersezione, $A \cap B$, è l'insieme di tutti gli eventi elementari in S che appartengono sia ad A che a B

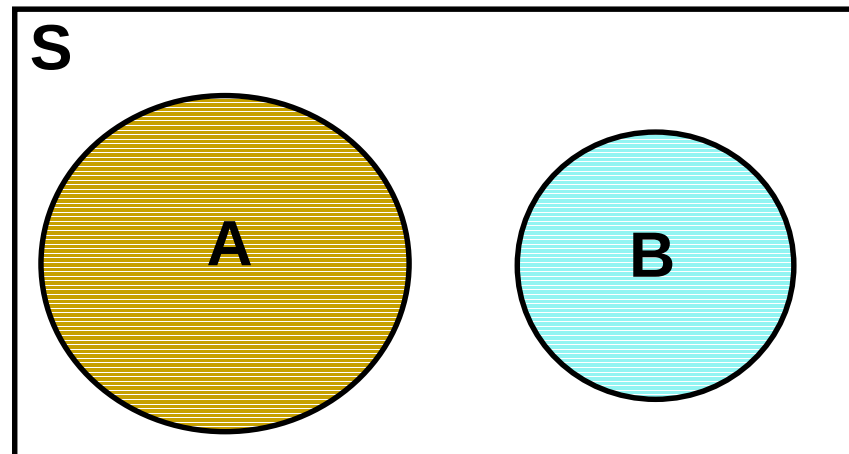


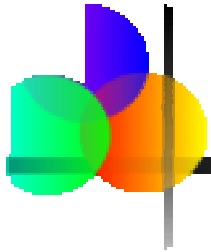


Concetti Importanti

(continuazione)

- A e B sono **Eventi Mutuamente Esclusivi** se non hanno in comune alcun evento elementare
 - i.e., l'insieme $A \cap B$ è vuoto

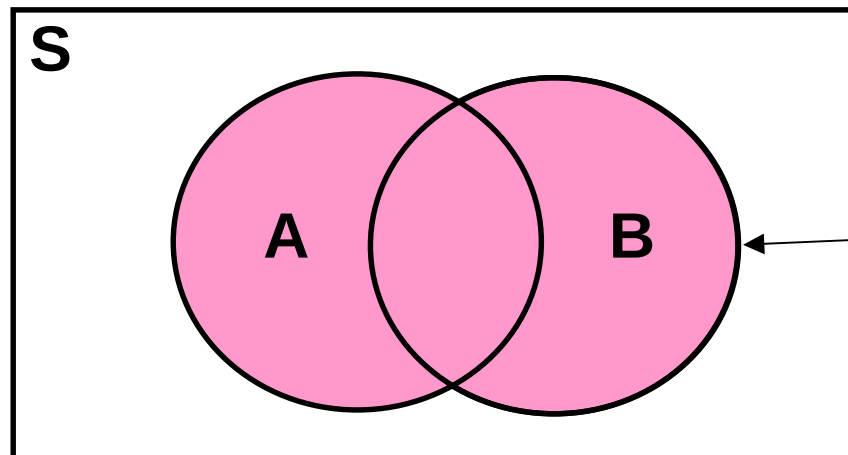




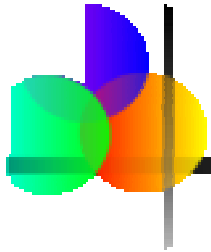
Concetti Importanti

(continuazione)

- **Unione di Eventi** – Se A e B sono due eventi in uno spazio campionario S , allora l'unione, $A \cup B$, è l'insieme di tutti gli eventi elementari di S che appartengono ad A oppure a B



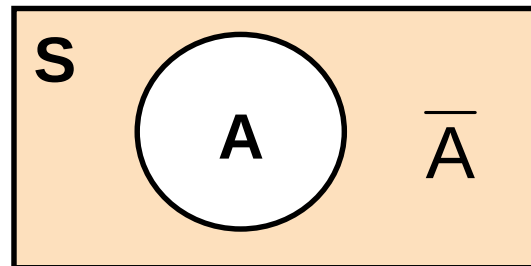
L'area ombreggiata
rappresenta $A \cup B$

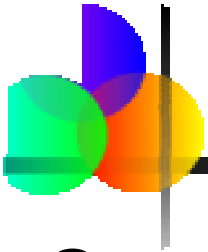


Concetti Importanti

(continuazione)

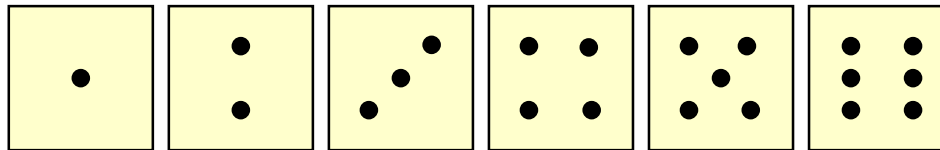
- Gli eventi $E_1, E_2, \dots, E_k$ sono **Collettivamente Esaustivi** se $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k = S$
 - i.e., gli eventi compongono interamente lo spazio campionario
- L'**Evento complementare** di un evento A è l'insieme di tutti gli eventi elementari nello spazio campionario che non appartengono ad A . L'evento complementare è indicato da $\bar{A}$





Esempi

Considera lo **Spazio Campionario** come la collezione di tutti i possibili risultati nel lancio di un dado:



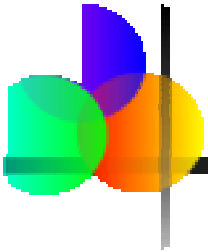
$$S = [1, 2, 3, 4, 5, 6]$$

Sia **A** l'evento "Il risultato è un numero pari"

Sia **B** l'evento "Il risultato è un numero maggiore o uguale a 4"

Allora

$$A = [2, 4, 6] \quad \text{e} \quad B = [4, 5, 6]$$



Esempi

(continuazione)

$$S = [1, 2, 3, 4, 5, 6]$$

$$A = [2, 4, 6]$$

$$B = [4, 5, 6]$$

Complementi:

$$\overline{A} = [1, 3, 5]$$

$$\overline{B} = [1, 2, 3]$$

Intersezioni:

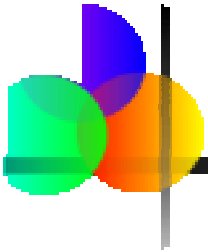
$$A \cap B = [4, 6]$$

$$\overline{A} \cap B = [5]$$

Unioni:

$$A \cup B = [2, 4, 5, 6]$$

$$A \cup \overline{A} = [1, 2, 3, 4, 5, 6] = S$$



Esempi

(continuazione)

$S = [1, 2, 3, 4, 5, 6]$

$A = [2, 4, 6]$

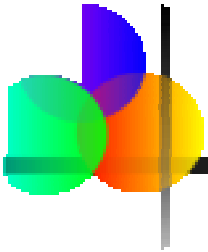
$B = [4, 5, 6]$

- **Mutuamente esclusivi:**

- A e B **non** sono mutuamente esclusivi
 - I risultati 4 e 6 sono comuni ad entrambi

- **Collettivamente esaustivi:**

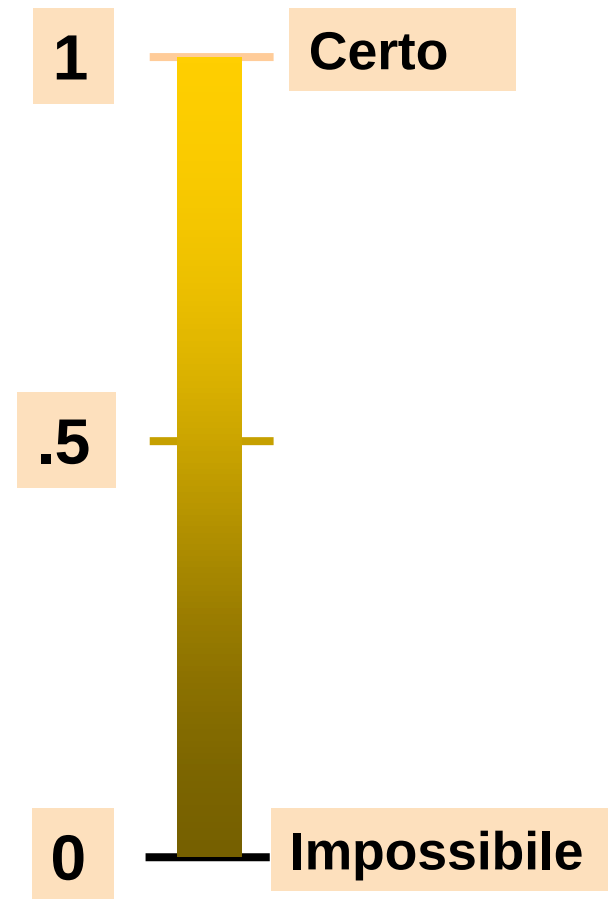
- A e B **non** sono collettivamente esaustivi
 - $A \cup B$ non contiene 1 o 3

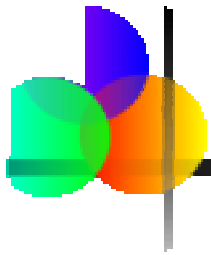


Probabilità

- **Probabilità** – la possibilità che un evento incerto si manifesti (sempre tra 0 e 1)

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad \text{Per qualsiasi evento } A$$





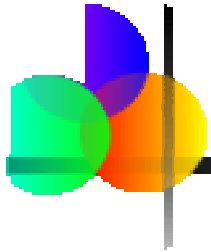
Valutando la Probabilità

- Ci sono tre approcci per valutare la probabilità di un evento incerto:

1. probabilità classica

$$\text{probabilità dell'evento } A = \frac{N_A}{N} = \frac{\text{numero di eventi elementari che soddisfano la condizione dell'evento}}{\text{numero complessivo di eventi elementari dello spazio campionario}}$$

- Ipotizza che tutti i risultati dello spazio campionario siano ugualmente possibili

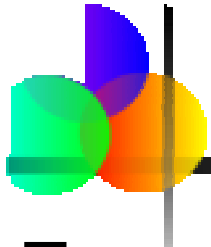


Conteggio dei Possibili Risultati

- Usare la **formula** per determinare il numero di combinazioni di n oggetti presi k alla volta

$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- dove
 - $n! = n(n-1)(n-2)\dots(1)$
 - $0! = 1$ per definizione



Valutando la Probabilità

Tre approcci (continuazione)

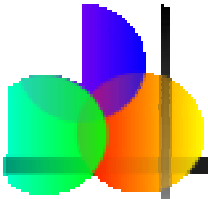
2. Interpretazione frequentista

$$\text{probabilità dell'evento } A = \frac{n_A}{n} = \frac{\text{numero di eventi nella popolazione che soddisfano l'evento } A}{\text{numero complessivo di eventi nella popolazione}}$$

- Il limite della proporzione di volte che un evento A occorre in un numero elevato di ripetizioni dell'esperimento, n

3. Probabilità soggettiva

un'opinione o credenza individuale circa la probabilità del verificarsi di un certo evento



Assiomi della Probabilità

1. Se A è un qualunque evento dello spazio campionario S , allora

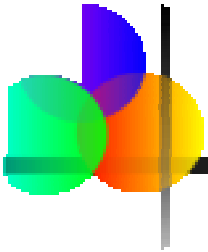
$$0 \leq P(A) \leq 1$$

2. Sia A un evento di S , e indichiamo con O_i gli eventi elementari. Allora

$$P(A) = \sum_A P(O_i)$$

(la notazione indica che la sommatoria si estende a tutti gli eventi elementari di A)

3. $P(S) = 1$



Regole della Probabilità

- La Regola dell'evento complementare:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad \text{i.e., } P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

- La Regola Additiva:

- La probabilità dell'unione di due eventi è

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

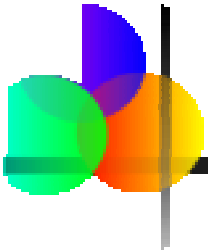
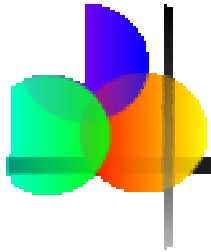


Tabella delle Probabilità

Probabilità marginali e congiunte per i due eventi A e B sono riassunte nella seguente tabella:

	B	$\bar{B}$	
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
	$P(B)$	$P(\bar{B})$	$P(S) = 1.0$



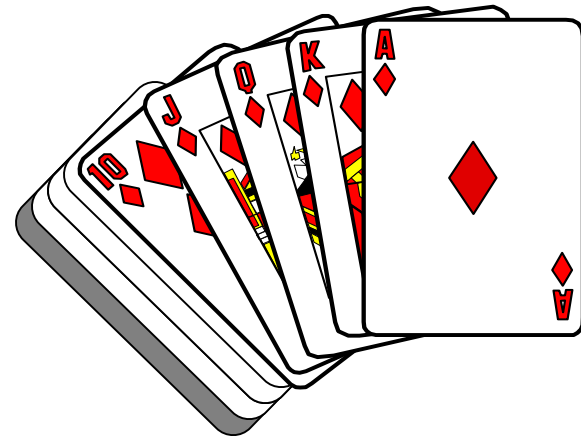
Esempio Regola Additiva

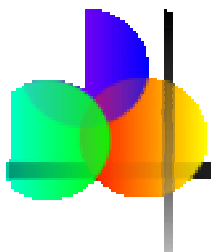
Considera un mazzo di 52 carte, con i quattro semi:



Evento A = la carta è un asso

Evento B = la carta è rossa





Esempio Regola Additiva

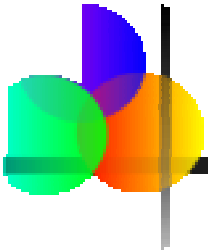
(continuazione)

$$P(\text{Rossa} \cup \text{Asso}) = P(\text{Rossa}) + P(\text{Asso}) - P(\text{Rossa} \cap \text{Asso})$$

$$= 26/52 + 4/52 - 2/52 = 28/52$$

Tipo	Colore		Totale
	Rossa	Nera	
Asso	2	2	4
Non-Asso	24	24	48
Totale	26	26	52

Non contare
due volte i
due assi rossi!



Probabilità Condizionata

- Una **probabilità condizionata** è la probabilità di un evento, dato che l'altro evento si è verificato:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

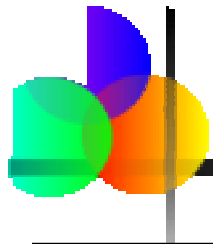


La probabilità
condizionata di A dato
che B si è verificato

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$



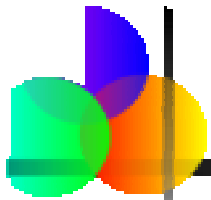
La probabilità
condizionata di B dato
che A si è verificato



Esempio Probabilità Condizionata

- In una concessionaria di macchine usate, 70% delle loro macchine hanno l'aria condizionata (AC) e 40% hanno un lettore CD (CD). 20% delle loro macchine hanno entrambi.
- Qual'è la probabilità che una macchina abbia un lettore CD, dato che ha l'aria condizionata?

i.e., vogliamo calcolare $P(\text{CD} \mid \text{AC})$



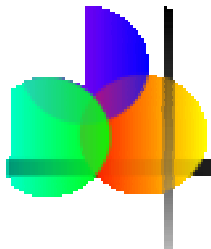
Esempio Probabilità Condizionata

(continuazione)

- In una concessionaria di macchine usate, **70%** delle loro macchine hanno l'aria condizionata (AC) e **40%** hanno un lettore CD (CD). **20%** delle loro macchine hanno entrambi.

	CD	No CD	Totale
AC	.2	.5	.7
No AC	.2	.1	.3
Totale	.4	.6	1.0

$$P(\text{CD} | \text{AC}) = \frac{P(\text{CD} \cap \text{AC})}{P(\text{AC})} = \frac{.2}{.7} = .2857$$



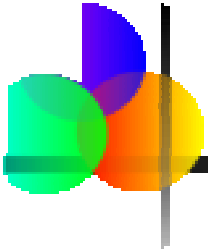
Esempio Probabilità Condizionata

(continuazione)

- **Dato AC**, consideriamo solo la prima riga (70% delle macchine). Fra queste, 20% hanno un lettore CD . 20% di 70% è 28.57%.

	CD	No CD	Totale
AC	.2	.5	.7
No AC	.2	.1	.3
Totale	.4	.6	1.0

$$P(\text{CD} | \text{AC}) = \frac{P(\text{CD} \cap \text{AC})}{P(\text{AC})} = \frac{.2}{.7} = .2857$$



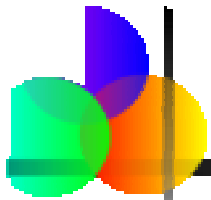
Regola Moltiplicativa

- Regola moltiplicativa per due eventi A e B:

$$P(A \cap B) = P(A | B)P(B)$$

inoltre

$$P(A \cap B) = P(B | A)P(A)$$



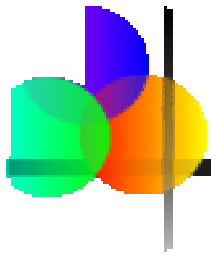
Esempio Regola Moltiplicativa

$$P(\text{Rossa} \cap \text{Asso}) = P(\text{Rossa} | \text{Asso})P(\text{Asso})$$

$$= \left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{4}{52}\right) = \frac{2}{52}$$

$$= \frac{\text{numero di carte che sono rosse e asso}}{\text{numero complessivo di carte}} = \frac{2}{52}$$

Tipo	Colore		Totale
	Rossa	Nera	
Asso	2	2	4
Non-Asso	24	24	48
Totale	26	26	52



Indipendenza Statistica

- Due eventi sono **statisticamente indipendenti** se e solo se:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

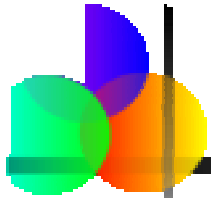
- Gli eventi A e B sono indipendenti quando la probabilità di un evento non è influenzata dall'altro evento
- Se A e B sono indipendenti, allora

$$P(A | B) = P(A)$$

se $P(B) > 0$

$$P(B | A) = P(B)$$

se $P(A) > 0$

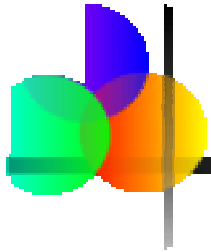


Esempio Indipendenza Statistica

- In una concessionaria di macchine usate, **70%** delle loro macchine hanno l'aria condizionata (AC) e **40%** hanno un lettore CD (CD). **20%** delle loro macchine hanno entrambi.

	CD	No CD	Totale
AC	.2	.5	.7
No AC	.2	.1	.3
Totale	.4	.6	1.0

- Sono gli eventi AC e CD statisticamente indipendenti?



Esempio Indipendenza Statistica

(continuazione)

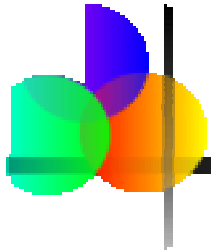
	CD	No CD	Totale
AC	.2	.5	.7
No AC	.2	.1	.3
Totale	.4	.6	1.0

$$P(AC \cap CD) = 0.2$$

$$\left. \begin{array}{l} P(AC) = 0.7 \\ P(CD) = 0.4 \end{array} \right\} P(AC)P(CD) = (0.7)(0.4) = 0.28$$

$$P(AC \cap CD) = 0.2 \neq P(AC)P(CD) = 0.28$$

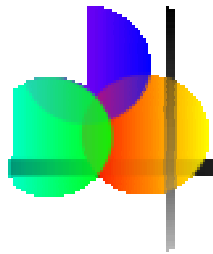
Quindi i due eventi **non** sono statisticamente indipendenti



Probabilità Bivariate

Risultati di eventi bivariati:

	B_1	B_2	$\dots$	B_k
A_1	$P(A_1 \cap B_1)$	$P(A_1 \cap B_2)$	$\dots$	$P(A_1 \cap B_k)$
A_2	$P(A_2 \cap B_1)$	$P(A_2 \cap B_2)$	$\dots$	$P(A_2 \cap B_k)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_h	$P(A_h \cap B_1)$	$P(A_h \cap B_2)$	$\dots$	$P(A_h \cap B_k)$



Probabilità Congiunte e Marginali

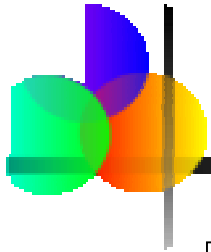
- La probabilità di un evento congiunto, $A \cap B$:

$$P(A \cap B) = \frac{\text{numero di eventi semplici che soddisfano A e B}}{\text{numero complessivo di eventi elementari}}$$

- Calcolo di una probabilità marginale:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_k)$$

- Dove $B_1, B_2, \dots, B_k$ sono k eventi mutuamente esclusivi e collettivamente esaustivi

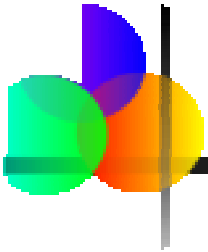


Esempio Probabilità Marginale

P(Asso)

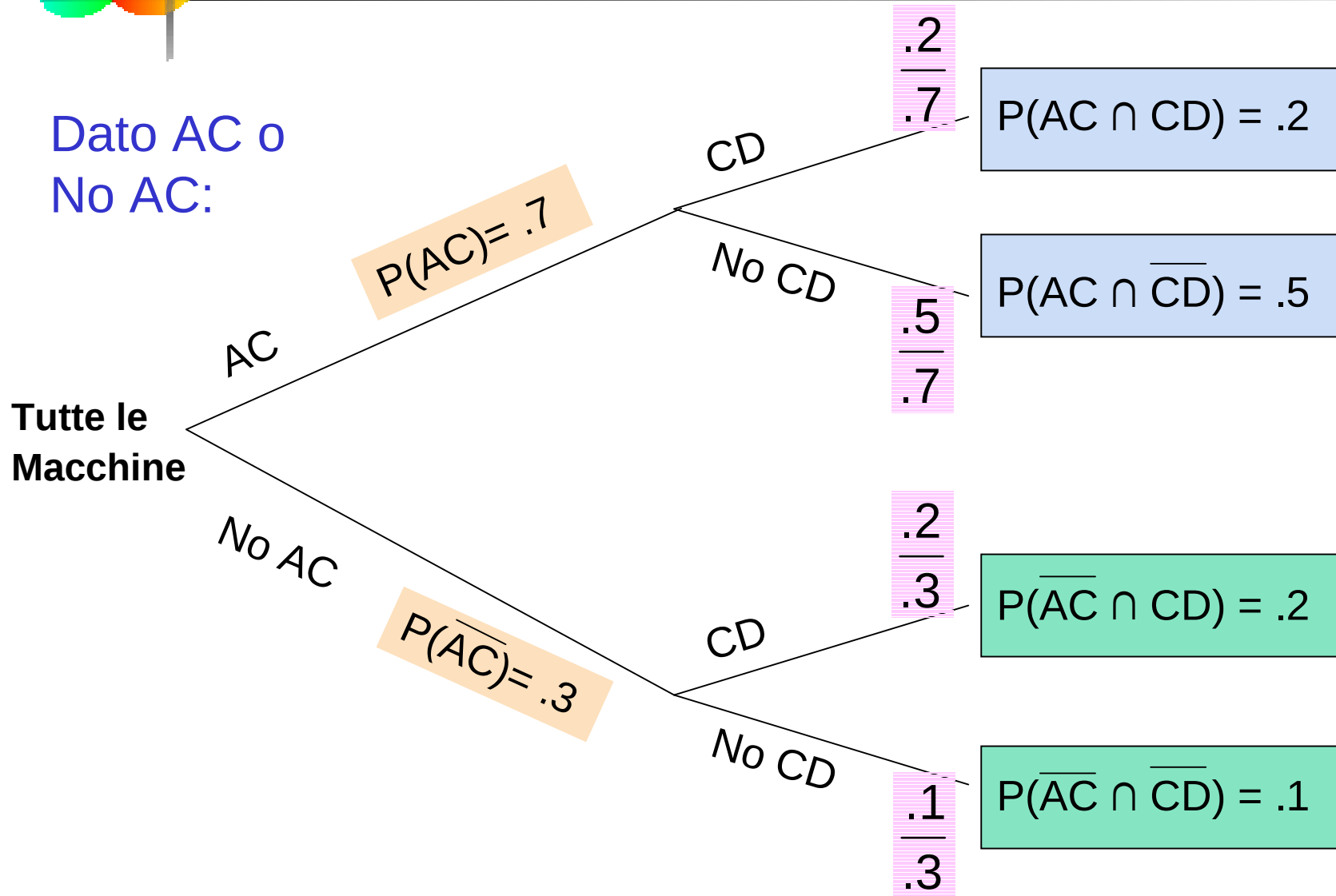
$$= P(\text{Asso} \cap \text{Rossa}) + P(\text{Asso} \cap \text{Nera}) = \frac{2}{52} + \frac{2}{52} = \frac{4}{52}$$

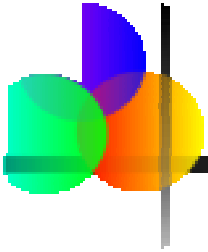
Type	Colore		Totale
	Rossa	Nera	
Asso	2	2	4
Non-Asso	24	24	48
Totale	26	26	52



Uso di un Diagramma ad Albero

Dato AC o
No AC:

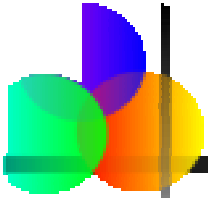




Odds

- Gli **odds** in favore di un particolare evento sono dati dal rapporto tra la probabilità dell'evento e la probabilità dell'evento complementare
- Gli odds in favore di A sono

$$\text{odds} = \frac{P(A)}{1 - P(A)} = \frac{P(A)}{P(\bar{A})}$$



Odds: Esempio

- Calcolare la probabilità di vittoria se gli odds in favore della vittoria sono 3 a 1:

$$\text{odds} = \frac{3}{1} = \frac{P(A)}{1-P(A)}$$

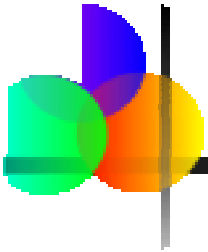
- Adesso moltiplica entrambi i lati dell'equazione per $1 - P(A)$ e risolvi rispetto a $P(A)$:

$$3 \times (1 - P(A)) = P(A)$$

$$3 - 3P(A) = P(A)$$

$$3 = 4P(A)$$

$$P(A) = 0.75$$



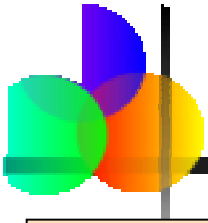
Overinvolvement Ratio

- La probabilità dell'evento A_1 condizionata dall'evento B_1 divisa per la probabilità di A_1 condizionata dall'evento B_2 viene definita **overinvolvement ratio**:

$$\frac{P(A_1 | B_1)}{P(A_1 | B_2)}$$

- Un overinvolvement ratio maggiore di 1 implica che l'evento A_1 aumenta il rapporto degli odds condizionati in favore di B_1 :

$$\frac{P(B_1 | A_1)}{P(B_2 | A_1)} > \frac{P(B_1)}{P(B_2)}$$



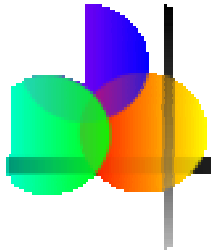
Teorema di Bayes

$$P(E_i | A) = \frac{P(A|E_i)P(E_i)}{P(A)}$$
$$= \frac{P(A|E_i)P(E_i)}{P(A|E_1)P(E_1) + P(A|E_2)P(E_2) + \dots + P(A|E_k)P(E_k)}$$

■ dove:

$E_i = i^{\text{mo}}$ evento di k eventi mutuamente esclusivi e collettivamente esaustivi

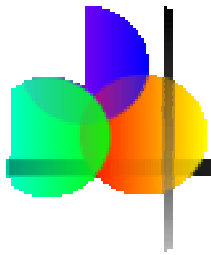
A = nuovo evento che può avere un impatto su $P(E_i)$



Esempio Teorema di Bayes

- Una compagnia di trivellazione ha stimato che la probabilità di trovare il petrolio nel suo nuovo pozzo è del 40% .
- Per raccogliere ulteriori informazioni, la compagnia programma un test dettagliato. Storicamente, 60% dei pozzi di successo sono passati attraverso un test dettagliato, e 20% dei pozzi non di successo sono passati attraverso un test dettagliato.
- Dato che questo pozzo viene programmato per un test dettagliato, qual'è la probabilità che il pozzo sarà di successo?



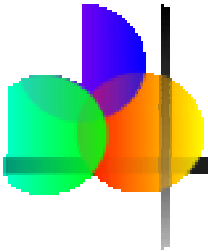


Esempio Teorema di Bayes

(continuazione)

- Sia S = pozzo di successo
 U = pozzo non di successo
- $P(S) = .4$, $P(U) = .6$ (probabilità a priori)
- Denotiamo l'evento "test dettagliato" con D
- Probabilità condizionate:
$$P(D|S) = .6 \qquad P(D|U) = .2$$
- L'obiettivo è di trovare $P(S|D)$





Esempio Teorema di Bayes

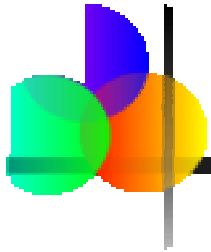
(continuazione)

Applichiamo il Teorema di Bayes:

$$\begin{aligned} P(S | D) &= \frac{P(D | S)P(S)}{P(D | S)P(S) + P(D | U)P(U)} \\ &= \frac{(.6)(.4)}{(.6)(.4) + (.2)(.6)} \\ &= \frac{.24}{.24 + .12} = .667 \end{aligned}$$



Quindi la probabilità di successo revisionata (dalla stima iniziale di .4), dato che il pozzo è stato programmato per un test dettagliato, è .667



Riepilogo del Capitolo

- Definiti i concetti fondamentali della probabilità
 - Spazio campionario e eventi, intersezione e unione di eventi, eventi mutuamente esclusivi e collettivamente esaustivi, evento complementare
- Esamine le regole fondamentali della probabilità
 - Regola dell'evento complementare, regola additiva, regola moltiplicativa
- Definite probabilità condizionate, congiunte, e marginali
- Esaminati odds e overinvolvement ratio
- Definita l'indipendenza statistica
- Discusso il Teorema di Bayes