Statistica

Capitolo 5

Variabili Aleatorie Discrete e
Distribuzioni di Probabilità

Obiettivi del Capitolo

Dopo aver completato il capitolo, sarete in grado di:

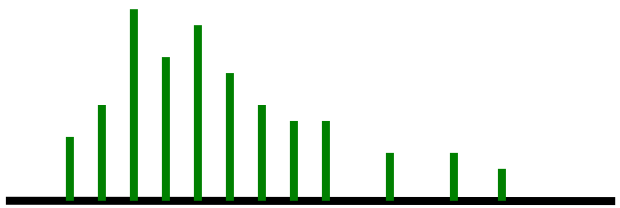
- Interpretare la media e lo scarto quadratico medio per una variabile aleatoria discreta
- Usare la distribuzione di probabilità binomiale per calcolare probabilità
- Descrivere quando usare la distribuzione binomiale
- Usare le distribuzioni di probabilità discrete ipergeometrica e Poisson per calcolare probabilità
- Spiegare covarianza e correlazione per variabili aleatorie con distribuzione congiunta

Introduzione alle Distribuzioni di Probabilità

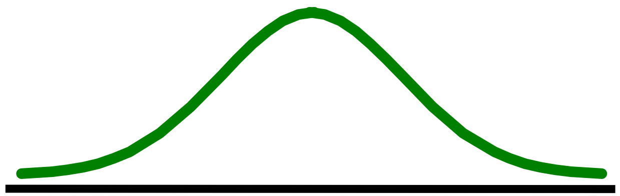
- **Variabile Aleatoria**
  - Rappresenta un possibile valore numerico prodotto dall'esperimento aleatorio

Variabili Aleatorie

Cap. 5 — **Variabili Aleatorie Discrete**



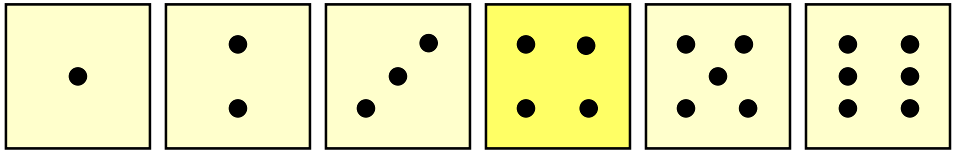
Variabili Aleatorie Continue — Cap. 6



Variabili Aleatorie Discrete

- Può assumere solo un insieme numerabile di valori

Esempi:



- **Lancia due volte un dado**

  Sia X il numero di volte che si ottiene 4

  (allora X può essere 0, 1, o 2 volte)

- **Lancia una moneta 5 volte.**

  Sia X il numero complessivo di teste

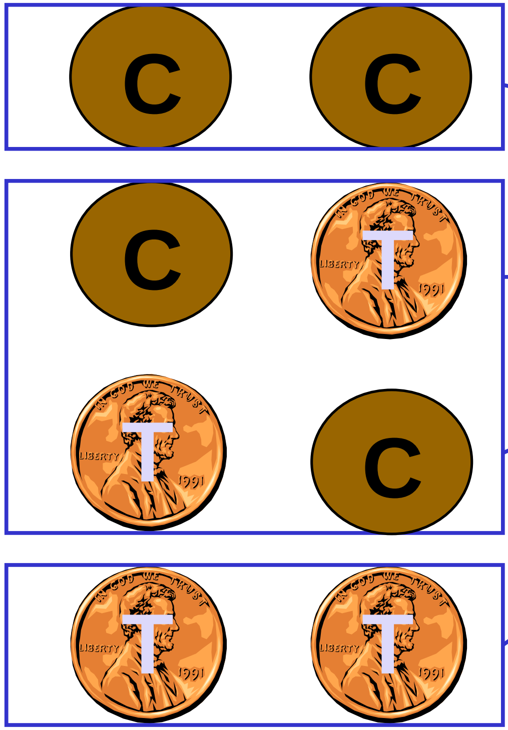
  (allora X = 0, 1, 2, 3, 4, o 5)

Distribuzioni di Probabilità Discrete

Esperimento: Lancia 2 Monete. Sia X = # di teste.

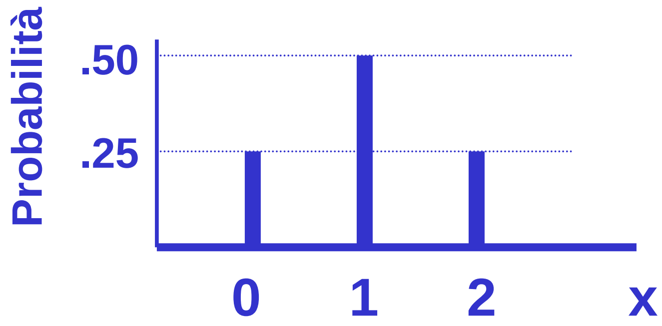
Calcola P(x) , i.e., P(X = x) , per tutti i valori di x:

4 possibili risultati



Distribuzione di Probabilità

Valori di x	Probabilità
0	1/4 = .25
1	2/4 = .50
2	1/4 = .25



Distribuzione di Probabilità
Proprietà Necessarie

- $\boxed{P(x) \geq 0}$ per ogni valore di x

- Le singole probabilità sommano a 1;

$$\boxed{\sum_x P(x) = 1}$$

(La notazione indica che la sommatoria si estende a tutti i possibili valori di x)

Funzione di Ripartizione

- La Funzione di ripartizione, indicata con $F(x_0)$, esprime la probabilità che X non superi il valore x_0

$$F(x_0) = P(X \leq x_0)$$

- In altre parole,

$$F(x_0) = \sum_{x \leq x_0} P(x)$$

Valore Atteso

- Valore atteso (o media) di una distribuzione discreta (Media Pesata)

$$\mu = E(x) = \sum_x xP(x)$$

- Esempio: Lancia 2 monete,
  x = # di teste,
  calcoliamo il valore atteso di x:

$E(x) = (0 \times .25) + (1 \times .50) + (2 \times .25)$
$= 1.0$

x	P(x)
0	.25
1	.50
2	.25

Varianza e Scarto Quadratico Medio

- Varianza di una variabile aleatoria discreta X

$$\sigma^2 = E(X-\mu)^2 = \sum_x (x-\mu)^2 P(x)$$

- Scarto Quadratico Medio di una variabile aleatoria discreta X

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\sum_x (x-\mu)^2 P(x)}$$

Esempio Scarto Quadratico Medio

- Esempio: Lancia 2 monete, X = # di teste, calcoliamo lo scarto quadratico medio (ricorda E(x) = 1)

$$\sigma = \sqrt{\sum_x (x-\mu)^2 P(x)}$$

$$\sigma = \sqrt{(0-1)^2(.25) + (1-1)^2(.50) + (2-1)^2(.25)} = \sqrt{.50} = .707$$

Numero possibile di teste = 0, 1, or 2

Funzioni di Variabili Aleatorie

- Se $P(x)$ è la funzione di probabilità di una variabile aleatoria discreta X, e $g(X)$ è una qualunque funzione di X, allora il valore atteso della funzione g è

$$\boxed{E[g(X)] = \sum_{x} g(x)P(x)}$$

Funzioni Lineari di Variabili Aleatorie

- Siano a e b delle costanti.

- a) $$\boxed{E(a) = a \qquad \text{e} \qquad Var(a) = 0}$$

  i.e., se una variabile aleatoria assume sempre il valore a, avrà media a e varianza 0

- b) $$\boxed{E(bX) = b\mu_X \qquad \text{e} \qquad Var(bX) = b^2\sigma_X^2}$$

  i.e., il valore atteso di b·X è b·E(x)

Funzioni Lineari di Variabili Aleatorie

(continuazione)

- Sia X una variabile aleatoria con media μ_x e varianza σ^2_x
- Siano a e b due costanti.
- Sia Y = a + bX
- Allora la media e varianza di Y sono

$$\mu_Y = E(a+bX) = a + b\mu_X$$

$$\sigma^2_Y = Var(a+bX) = b^2\sigma^2_X$$

- Lo scarto quadratico medio di Y è allora

$$\sigma_Y = |b|\sigma_X$$

Distribuzioni di Probabilità

Distribuzioni di Probabilità

- Cap. 5 — Distribuzioni di Probabilità **Discrete**
  - Binomiale
  - Ipergeometrica
  - Poisson
- Cap. 6 — Distribuzioni di Probabilità **Continue**
  - Uniforme
  - Normale
  - Esponenziale

La Distribuzione Binomiale

Distribuzioni di Probabilità

- Distribuzioni di Probabilità **Discrete**
  - Binomiale
  - Ipergeometrica
  - Poisson

Distribuzione di Bernoulli

- Considera solo due risultati: "successo" o "insuccesso"
- Sia P la probabilità di successo
- Sia 1 – P la probabilità di insuccesso
- Definiamo la variabile aleatoria X:

  x = 1 se successo, x = 0 se insuccesso

- Allora la Funzione di Probabilità di Bernoulli è

$$\boxed{P(0) = (1 - P) \quad \text{e} \quad P(1) = P}$$

Distribuzione di Bernoulli
Media e Varianza

- La media è $\boxed{\mu = P}$

$$\mu = E(X) = \sum_X xP(x) = (0)(1-P) + (1)P = P$$

- La varianza è $\boxed{\sigma^2 = P(1 - P)}$

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \sum_X (x-\mu)^2 P(x)$$

$$= (0-P)^2(1-P) + (1-P)^2 P = P(1-P)$$

Sequenze di x Successi in n Prove

- Il numero di sequenze con x successi in n prove indipendenti è:

$$C_x^n = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Dove $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$ e $0! = 1$

- Queste sequenze sono mutuamente esclusive, poichè non se ne possono verificare due contemporaneamente

Distribuzione di Probabilità Binomiale

- Un numero fissato di osservazioni, n
  - e.g., 15 lanci di una moneta; dieci lampadine prese in un magazzino
- Due categorie mutuamente esclusive e collettivamente esaustive
  - e.g., testa o croce in ciascun lancio della moneta; lampadina difettosa o non difettosa
  - Generalmente chiamati “successo” e “insuccesso”
  - Probabilità di successo è P, probabilità di insuccesso è 1 – P
- La probabilità constante per ciascuna osservazione
  - e.g., Probabilità di ottenere una testa è la stessa ogni volta che lanciamo la moneta
- Le osservazioni sono indipendenti
  - Il risultato di una osservazione non influenza il risultato dell’altra

Possibili Scenari di una Distribuzione Binomiale

- Uno stabilimento di produzione etichetta gli articoli in: difettosi o accettabili
- Un’azienda che fa un’offerta per acquisire dei contratti o otterrà il contratto o non lo otterrà
- Un’azienda di marketing riceve le risposte ad un sondaggio nella forma “si lo comprerò” oppure “no non lo comprerò”
- Nuovi candidati per un lavoro o accetteranno l’offerta o la rifiuteranno

Formula Binomiale

$$P(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} P^x (1-P)^{n-x}$$

P(x) = probabilità di **x** successi in **n** prove,
con probabilità di successo **P** in ogni prova

x = numero di 'successi' nel campione,
(x = 0, 1, 2, ..., n)

n = dimensione del campione (numero di prove o osservazioni)

P = probabilità di "successo"

Esempio: Lancia in aria una moneta 4 volte, sia x = # di teste:

n = 4

P = 0.5

1 - P = (1 - 0.5) = 0.5

x = 0, 1, 2, 3, 4

Esempio:
Calcolo della Probabilità Binomiale

Qual'è la probabilità di ottenere un successo in cinque osservazioni se la probabilità di successo è 0.1?

x = 1, n = 5, e P = 0.1

$$P(x=1) = \frac{n!}{x!(n-x)!} P^X (1-P)^{n-X}$$

$$= \frac{5!}{1!(5-1)!} (0.1)^1 (1-0.1)^{5-1}$$

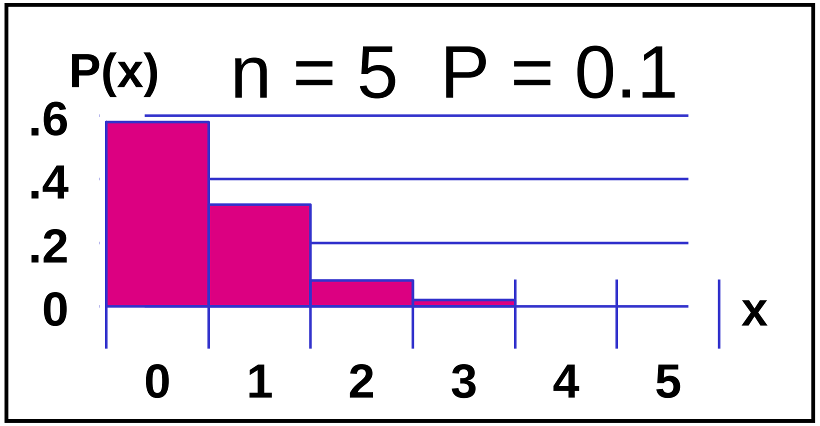
$$= (5)(0.1)(0.9)^4$$

$$= .32805$$

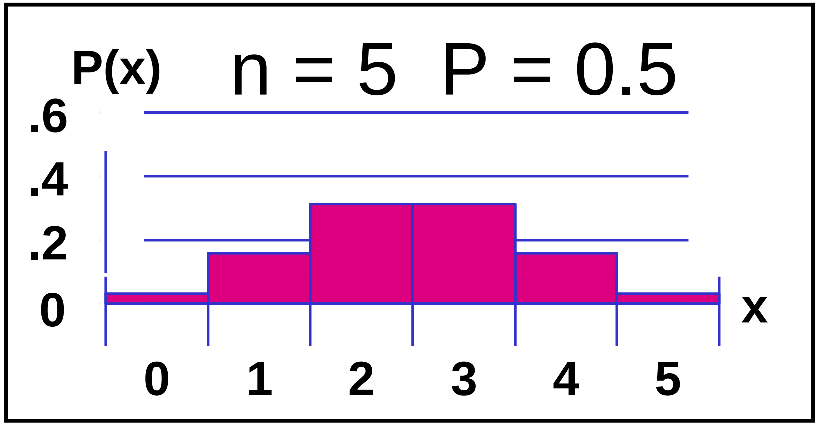
Distribuzione Binomiale

- La forma della distribuzione binomiale dipende dai valori di P e n

- Considera n = 5 e P = 0.1



- Considera n = 5 e P = 0.5



Distribuzione Binomiale
Media e Varianza

- Media

$$\mu = E(x) = nP$$

- Varianza e Scarto Quadratico Medio

$$\sigma^2 = nP(1-P)$$

$$\sigma = \sqrt{nP(1-P)}$$

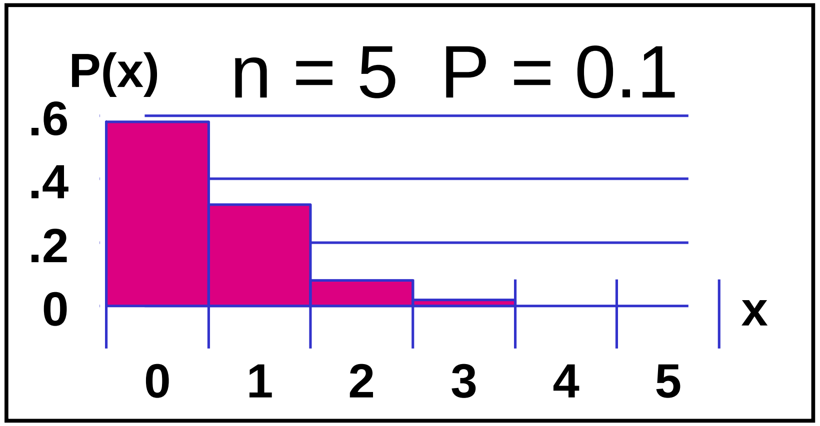
Dove n = dimensione del campione
P = probabilità di successo
(1 – P) = probabilità di insuccesso

Caratteristiche Binomiale

Esempi

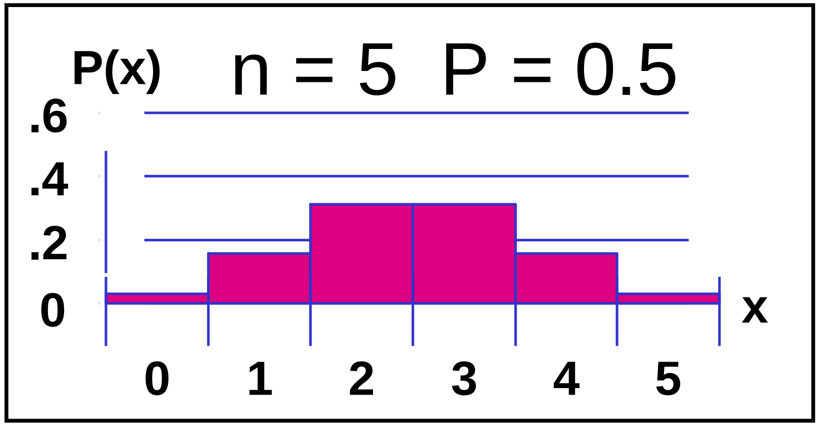
$$\mu = nP = (5)(0.1) = 0.5$$

$$\sigma = \sqrt{nP(1-P)} = \sqrt{(5)(0.1)(1-0.1)} = 0.6708$$



$$\mu = nP = (5)(0.5) = 2.5$$

$$\sigma = \sqrt{nP(1-P)} = \sqrt{(5)(0.5)(1-0.5)} = 1.118$$



Uso delle Tavole della Binomiale

N	x	…	p=.20	p=.25	p=.30	p=.35	p=.40	p=.45	p=.50
10	0	…	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010
	1	…	0.2684	0.1877	0.1211	0.0725	0.0403	0.0207	0.0098
	2	…	0.3020	0.2816	0.2335	0.1757	0.1209	0.0763	0.0439
	3	…	0.2013	0.2503	0.2668	**0.2522**	0.2150	0.1665	0.1172
	4	…	0.0881	0.1460	0.2001	0.2377	0.2508	0.2384	0.2051
	5	…	0.0264	0.0584	0.1029	0.1536	0.2007	0.2340	0.2461
	6	…	0.0055	0.0162	0.0368	0.0689	0.1115	0.1596	0.2051
	7	…	0.0008	0.0031	0.0090	0.0212	0.0425	0.0746	0.1172
	8	…	0.0001	0.0004	0.0014	0.0043	0.0106	**0.0229**	0.0439
	9	…	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0016	0.0042	0.0098
	10	…	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010

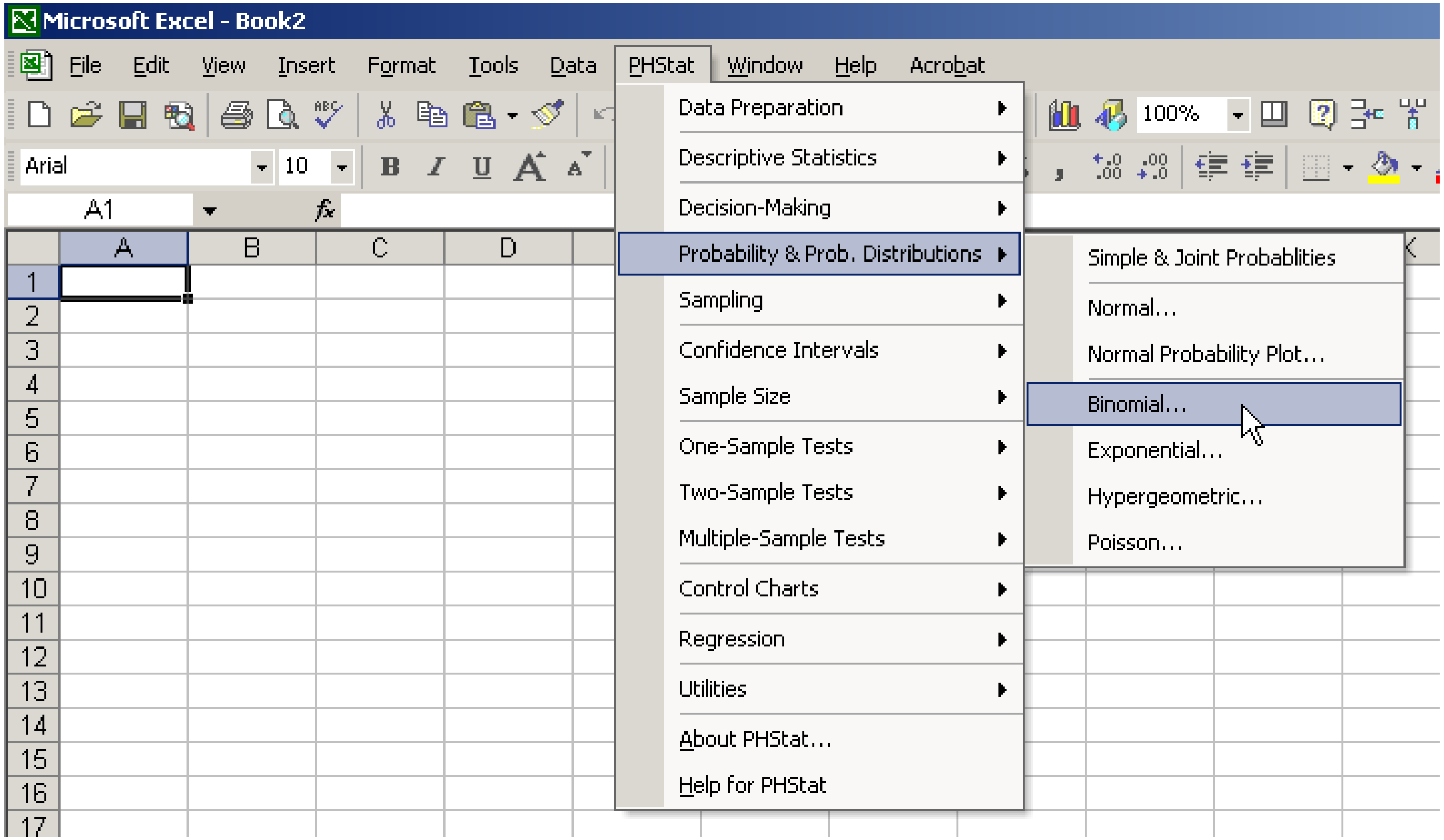
Esempi:

$n = 10, x = 3, P = 0.35$: $P(x = 3|n = 10, p = 0.35) = .2522$

$n = 10, x = 8, P = 0.45$: $P(x = 8|n = 10, p = 0.45) = .0229$

Uso di PHStat

- Seleziona PHStat / Probability & Prob. Distributions / Binomial…



Uso di PHStat

(continuazione)

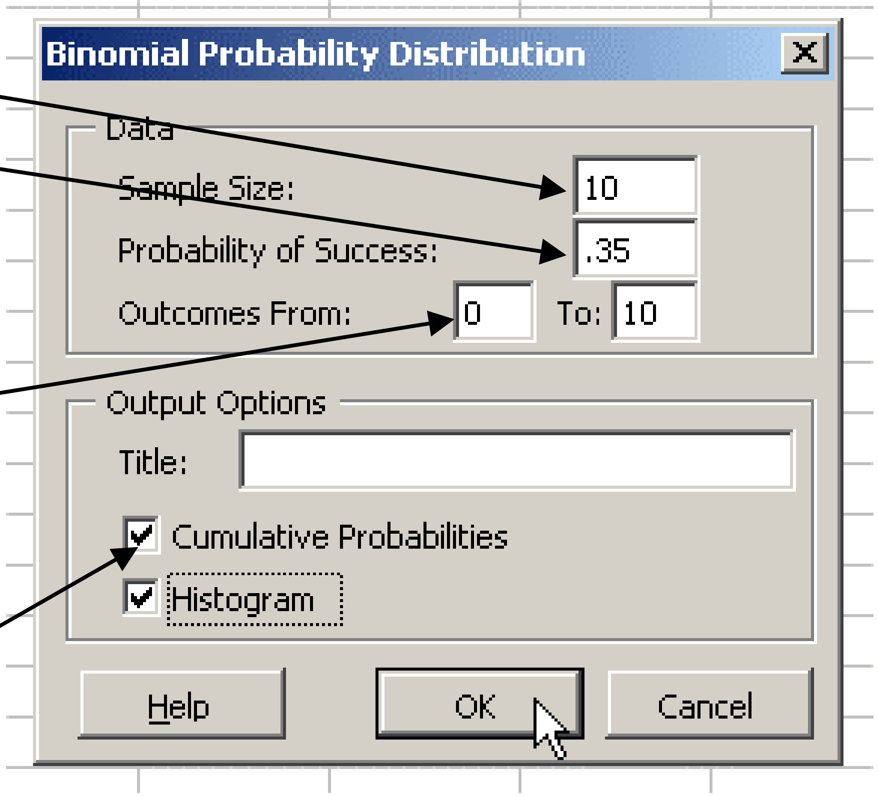
- Inserire i valori desiderati nella finestra di dialogo

Considera n = 10

p = .35

Risultati da x = 0
a x = 10 verranno
generati da PHStat

Ulteriori opzioni sono disponibili per output addizionale



Output di PHStat

Binomial Probabilities

Data	
Sample size	10
Probability of success	0.35

Statistics	
Mean	3.5
Variance	2.275
Standard deviation	1.50831

P(x = 3 | n = 10, P = .35) = .2522

Binomial Probabilities Table

X	P(X)	P(<=X)	P(<X)	P(>X)	P(>=X)
0	0.013463	0.013463	0	0.986537	1
1	0.072492	0.085954	0.013463	0.914046	0.986537
2	0.175653	0.261607	0.085954	0.738393	0.914046
3	0.25222	0.513827	0.261607	0.486173	0.738393
4	0.237668	0.751496	0.513827	0.248504	0.486173
5	0.15357	0.905066	0.751496	0.094934	0.248504
6	0.06891	0.973976	0.905066	0.026024	0.094934
7	0.021203	0.995179	0.973976	0.004821	0.026024
8	0.004281	0.99946	0.995179	0.00054	0.004821
9	0.000512	0.999972	0.99946	2.76E-05	0.00054
10	2.76E-05	1	0.999972	0	2.76E-05

P(x > 5 | n = 10, P = .35) = .0949

La Distribuzione Ipergeometrica

Distribuzioni di Probabilità

- Distribuzioni di Probabilità **Discrete**
  - Binomiale
  - Ipergeometrica
  - Poisson

La Distribuzione Ipergeometrica

- "n" prove in un campione estratto da una popolazione finita di dimensione N
- Campione estratto senza reintroduzione
- I risultati delle prove sono dipendenti
- Riguarda il calcolo della probabilità di "X" successi nel campione quando ci sono "S" successi nella popolazione

Formula
Distribuzione Ipergeometrica

$$P(x) = \frac{C_x^S C_{n-x}^{N-S}}{C_n^N} = \frac{\dfrac{S!}{x!(S-x)!} \times \dfrac{(N-S)!}{(n-x)!(N-S-n+x)!}}{\dfrac{N!}{n!(N-n)!}}$$

Dove

N = dimensione della popolazione

S = numero di successi nella popolazione

N – S = numero di insuccessi nella popolazione

n = dimensione del campione

x = numero di successi nel campione

n – x = numero di insuccessi nel campione

Uso della Distribuzione Ipergeometrica

- Esempio: Nel dipartimento ci sono 10 computer, 3 dei quali vengono selezionati per un controllo. Sappiamo che su 4 dei 10 computer sono stati installati dei programmi illegali. Qual'è la probabilità che 2 dei 3 computer selezionati contengono programmi illegali?

N = 10	n = 3
S = 4	x = 2

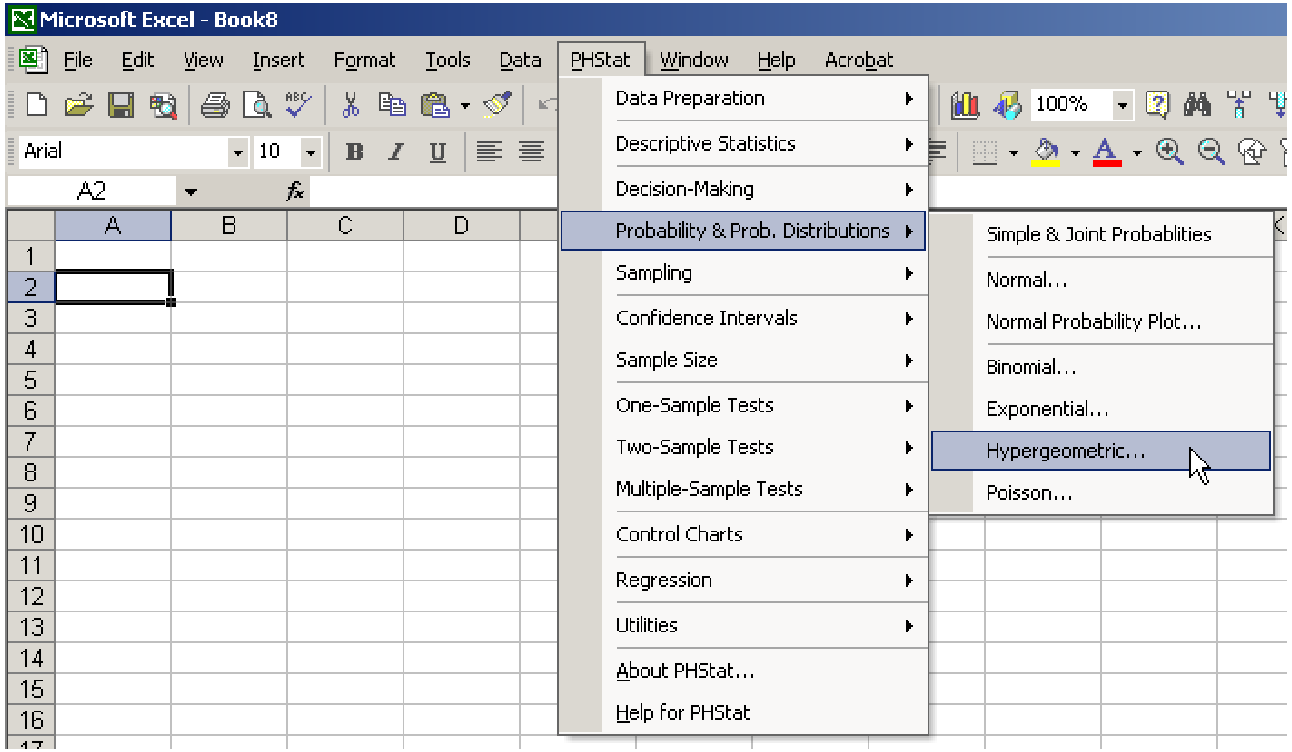
$$P(x=2)=\frac{C_x^S C_{n-x}^{N-S}}{C_n^N}=\frac{C_2^4 C_1^6}{C_3^{10}}=\frac{(6)(6)}{120}=0.3$$

La probabilità che 2 dei 3 computer selezionati contengono programmi illegali è 0.30, o 30%.

Distribuzione Ipergeometrica in PHStat

- Seleziona:

  PHStat / Probability & Prob. Distributions / Hypergeometric …

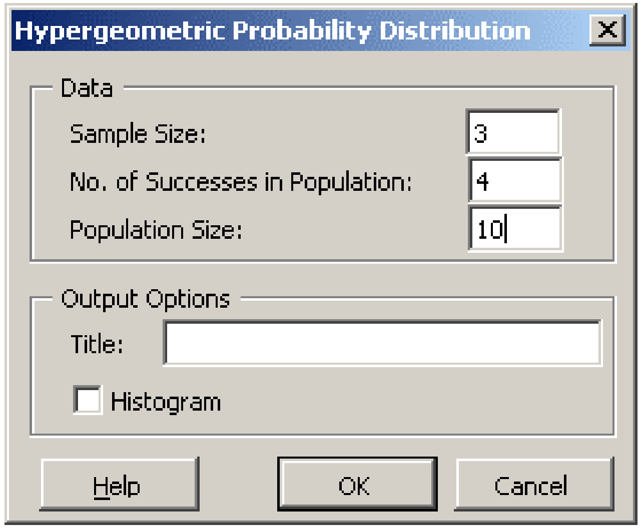


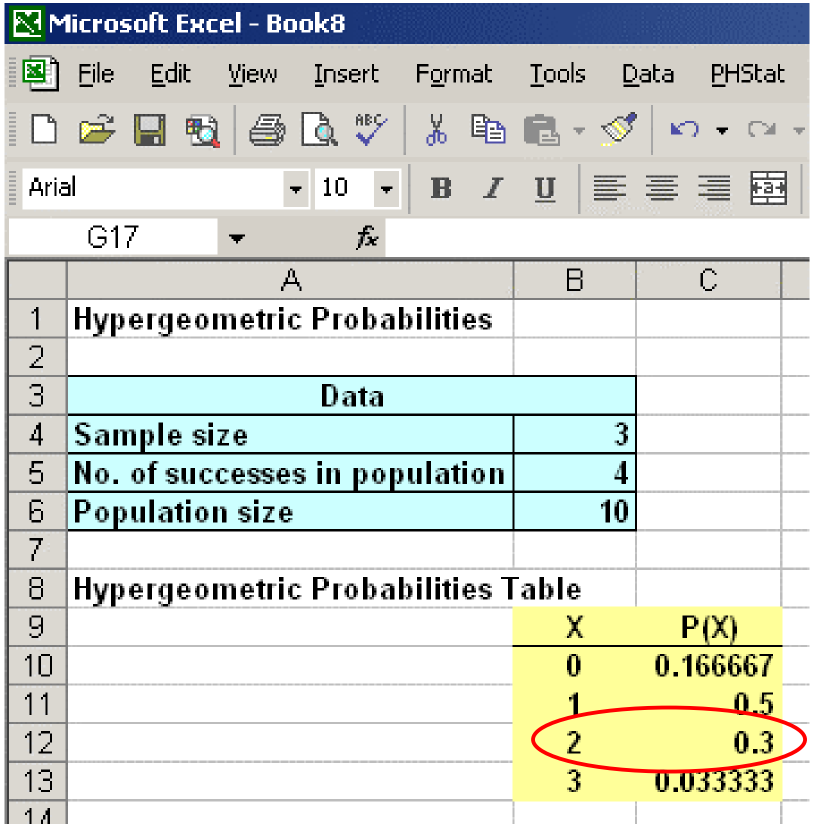
Distribuzione Ipergeometrica in PHStat

(continuazione)

- Completa la finestra di dialogo e ottieni l’output …

N = 10	n = 3
S = 4	x = 2





P(X = 2) = 0.3

La Distribuzione di Poisson

Distribuzioni di Probabilità

- Distribuzioni di Probabilità **Discrete**
  - Binomiale
  - Ipergeometrica
  - Poisson

La Distribuzione di Poisson

- Applica la distribuzione di Poisson quando:
  - Desideri contare il numero di volte un evento si verifica in un dato intervallo continuo
  - La probabilità che un evento si verifichi in un sottointervallo è molto bassa ed è la stessa per tutti i sottointervalli
  - Il numero di eventi che si verificano in un sottointervallo è indipendente dal numero di eventi che si verificano in un altro sottointervallo
  - L'evento non si può verificare più di una volta in ciascuno dei sottointervalli
  - Il numero medio di eventi per unità è λ (lambda)

Formula Distribuzione di Poisson

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

Dove:

x = numero di successi per unità

λ = numero atteso di successi per unità

e = base dei logaritmi naturali (2.71828...)

Caratteristiche Distribuzione di Poisson

- Media

$$\boxed{\mu = E(x) = \lambda}$$

- Varianza e Scarto Quadratico Medio

$$\boxed{\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \lambda}$$

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\lambda}}$$

dove λ = numero atteso di successi per unità

Uso delle Tavole Poisson

X	λ								
	0.10	0.20	0.30	0.40	**0.50**	0.60	0.70	0.80	0.90
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066
1	0.0905	0.1637	0.2222	0.2681	0.3033	0.3293	0.3476	0.3595	0.3659
2	0.0045	0.0164	0.0333	0.0536	**0.0758**	0.0988	0.1217	0.1438	0.1647
3	0.0002	0.0011	0.0033	0.0072	0.0126	0.0198	0.0284	0.0383	0.0494
4	0.0000	0.0001	0.0003	0.0007	0.0016	0.0030	0.0050	0.0077	0.0111
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0004	0.0007	0.0012	0.0020
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Esempio: Calcola P(X = 2) se $\lambda = .50$

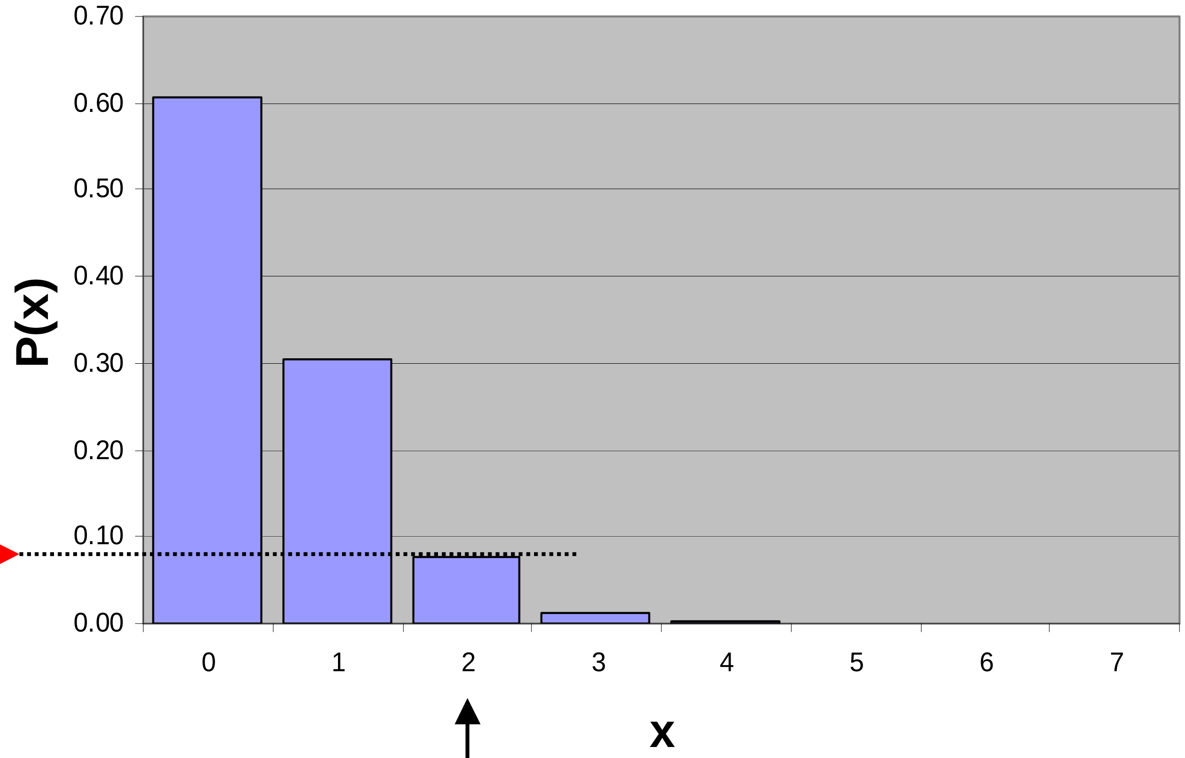
$$P(X=2) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{X}}{X!} = \frac{e^{-0.50}(0.50)^{2}}{2!} = .0758$$

Grafico delle Probabilità di Poisson

Graficamente:

λ = .50

X	λ = 0.50
0	0.6065
1	0.3033
2	0.0758
3	0.0126
4	0.0016
5	0.0002
6	0.0000
7	0.0000

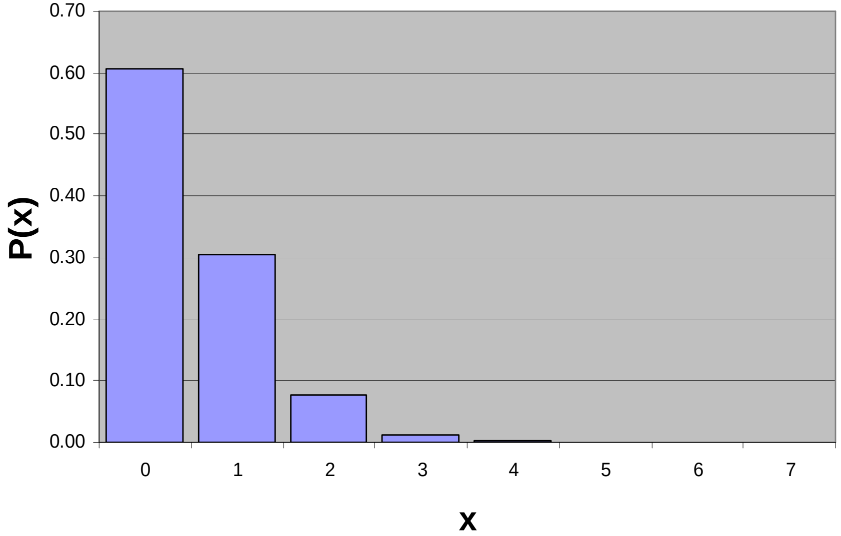


P(X = 2) = .0758

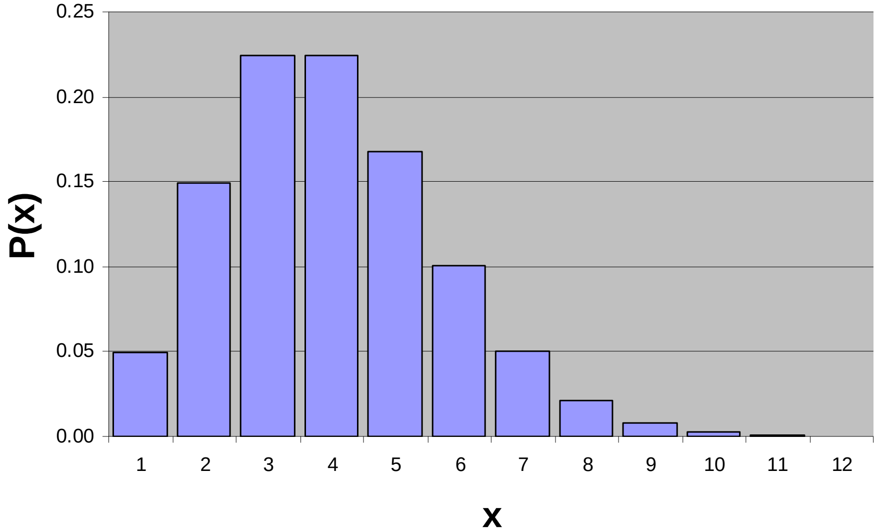
Forma Distribuzione di Poisson

- La forma della distribuzione di Poisson dipende dal parametro λ :

λ = 0.50



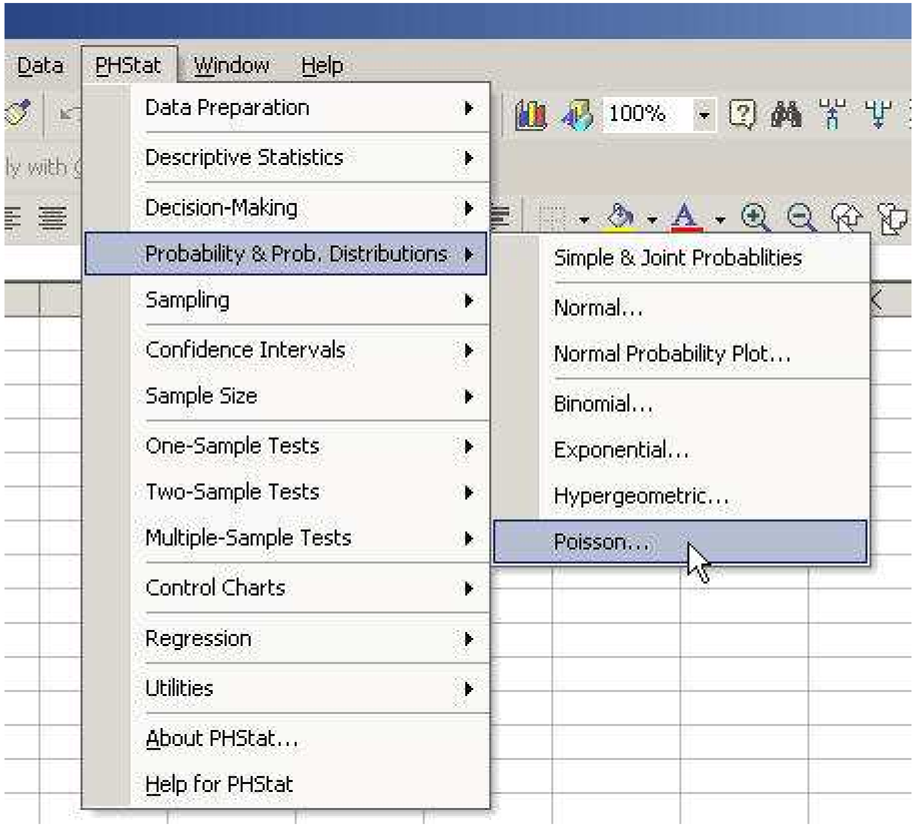
λ = 3.00



Distribuzione di Poisson con PHStat

- Seleziona:

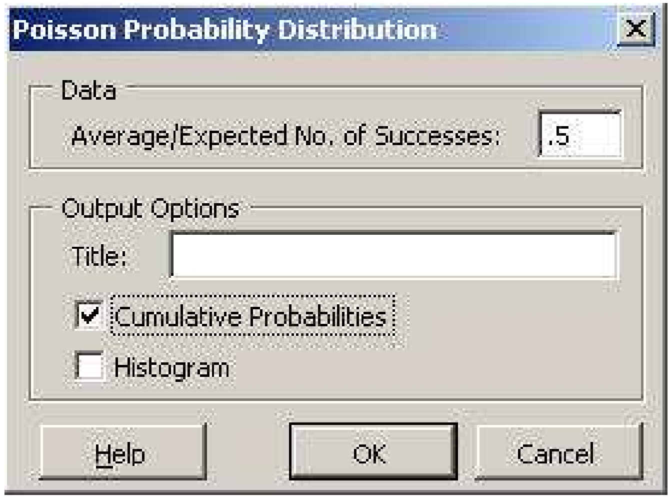
PHStat / Probability & Prob. Distributions / Poisson…



Distribuzione di Poisson con PHStat

(continuazione)

- Completa la finestra di dialogo e ottieni l'output …



	A	B	C	D	E	F	G
1	Poisson Probabilities for Customer Arrivals						
2							
3	Data						
4	Average/Expected number of successes:				0.5		
5							
6	Poisson Probabilities Table						
7		X	P(X)	P(<=X)	P(<X)	P(>X)	P(>=X)
8		0	0.606531	0.606531	0.000000	0.393469	1.000000
9		1	0.303265	0.909796	0.606531	0.090204	0.393469
10		2	0.075816	0.985612	0.909796	0.014388	0.090204
11		3	0.012636	0.998248	0.985612	0.001752	0.014388
12		4	0.001580	0.999828	0.998248	0.000172	0.001752
13		5	0.000158	0.999986	0.999828	0.000014	0.000172
14		6	0.000013	0.999999	0.999986	0.000001	0.000014
15		7	0.000001	1.000000	0.999999	0.000000	0.000001
16		8	0.000000	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000

$P(X = 2) = 0.0758$

Distribuzione di Probabilità Congiunta

- Una distribuzione di probabilità congiunta viene usata per esprimere la probabilità che X assuma un particolare valore x e, contemporaneamente, Y assuma il valore y, come funzione di x e y

$$P(x,y) = P(X = x \cap Y = y)$$

- Le probabilità marginali sono

$$P(x) = \sum_{y} P(x,y)$$

$$P(y) = \sum_{x} P(x,y)$$

Distribuzione di Probabilità Condizionata

- La distribuzione di probabilità condizionata della variabile aleatoria Y esprime la probabilità che Y assuma il valore y quando si specifica il valore x per X.

$$\boxed{P(y\,|\,x) = \frac{P(x,y)}{P(x)}}$$

- Analogamente, la distribuzione di probabilità condizionata di X dato Y = y, è:

$$\boxed{P(x\,|\,y) = \frac{P(x,y)}{P(y)}}$$

Indipendenza

- Le variabili aleatorie X e Y distribuite congiuntamente sono dette indipendenti se e solo se la loro distribuzione di probabilità congiunta è uguale al prodotto delle loro distribuzioni di probabilità marginali:

$$\boxed{P(x,y) = P(x)P(y)}$$

per tutte le possibili coppie di valori di x e y

- Un insieme di k variabili aleatorie sono indipendenti se e solo se

$$\boxed{P(x_1, x_2, \cdots, x_k) = P(x_1)P(x_2)\cdots P(x_k)}$$

Covarianza

- Siano X e Y due variabili aleatorie discrete con medie rispettivamente μ_X e μ_Y
- Il valore atteso di $(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)$ è chiamato covarianza di X e Y
- Per variabili aleatorie discrete

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = \sum_x \sum_y (x-\mu_x)(y-\mu_y)P(x,y)}$$

- Un'espressione equivalente è

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - \mu_x\mu_y = \sum_x \sum_y xyP(x,y) - \mu_x\mu_y}$$

Covarianza e Indipendenza

- La covarianza misura la forsa della relazione lineare tra due variabili aleatorie
- Se due variabili aleatorie sono statisticamente independenti, la loro covarianza vale zero
  - Il viceversa non è necessariamente vero

Correlazione

- La correlazione tra X e Y è :

$$\rho = \text{Corr}(X,Y) = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

- $\rho = 0 \Rightarrow$ non c'è relazione lineare tra X e Y
- $\rho > 0 \Rightarrow$ relazione lineare positiva tra X e Y
  - quando X assume valori alti (bassi) allora anche Y probabilmente assume valori alti (bassi)
  - $\rho = +1 \Rightarrow$ dipendenza lineare perfetta positiva
- $\rho < 0 \Rightarrow$ relazione lineare negativa tra X e Y
  - quando X assume valori alti (bassi) allora Y probabilmente assume valori bassi (alti)
  - $\rho = -1 \Rightarrow$ dipendenza lineare perfetta negativa

Valutazione di un Portafoglio

- Sia la variabile aleatoria X il prezzo del titolo A
- Sia la variabile aleatoria Y il prezzo del titolo B
- La quotazione di mercato, W, del portafoglio è data dalla combinazione lineare

$$\boxed{W = aX + bY}$$

(a rappresenta il numero di azioni del titolo A,
b rappresenta il numero di azioni del titolo B)

Valutazione di un Portafoglio

(continuazione)

- La media di W è

$$\mu_W = E[W] = E[aX + bY]$$
$$= a\mu_X + b\mu_Y$$

- La varianza di W è

$$\sigma_W^2 = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2 + 2ab\text{Cov}(X,Y)$$

oppure, usando il coefficiente di correlazione

$$\sigma_W^2 = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2 + 2ab\text{Corr}(X,Y)\sigma_X\sigma_Y$$

Esempio: Rendimento Investimenti

Rendimento in migliaia di dollari per due investimenti

$P(x_i y_i)$	Condizione economica	Investimento: Fondi Passivi X	Investimento: Fondi Aggressivi Y
.2	Recessione	- $ 25	- $200
.5	Economia Stabile	+ 50	+ 60
.3	Economia in Espansione	+ 100	+ 350

$$E(x) = \mu_x = (-25)(.2) + (50)(.5) + (100)(.3) = 50$$

$$E(y) = \mu_y = (-200)(.2) + (60)(.5) + (350)(.3) = 95$$

Calcolo dello Scarto Quadratico Medio del Rendimento

	Investimento	
$P(x_i y_i)$ Condizione economica	Fondi Passivi X	Fondi Aggressivi Y
0.2 Recessione	- $ 25	- $200
0.5 Economia Stabile	+ 50	+ 60
0.3 Economia in Espansione	+ 100	+ 350

$$\sigma_X = \sqrt{(-25-50)^2(0.2)+(50-50)^2(0.5)+(100-50)^2(0.3)}$$
$$= 43.30$$

$$\sigma_y = \sqrt{(-200-95)^2(0.2)+(60-95)^2(0.5)+(350-95)^2(0.3)}$$
$$= 193.71$$

Covarianza del Rendimento

$P(x_i y_i)$	Condizione economica	Investimento: Fondi Passivi X	Fondi Aggressivi Y
.2	Recessione	- $ 25	- $200
.5	Economia Stabile	+ 50	+ 60
.3	Economia in Espansione	+ 100	+ 350

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= (-25-50)(-200-95)(.2)+(50-50)(60-95)(.5) \\ &\quad +(100-50)(350-95)(.3) \\ &= 8250 \end{aligned}$$

Esempio Portafoglio

Investimento X: $\mu_x = 50$ $\sigma_x = 43.30$

Investimento Y: $\mu_y = 95$ $\sigma_y = 193.21$

$\sigma_{xy} = 8250$

Supponiamo 40% del portafoglio (P) sia costituito da Investimento X e 60% da Investimento Y:

$$E(P) = .4(50) + (.6)(95) = 77$$

$$\sigma_P = \sqrt{(.4)^2(43.30)^2 + (.6)^2(193.21)^2 + 2(.4)(.6)(8250)}$$
$$= 133.04$$

Il rendimento e la variabilità del portafoglio sono fra i valori degli investimenti X e Y considerati individualmente

Interpretazione dei Risultati per il Rendimento degli Investimenti

- Il fondo aggressivo ha un rendimento atteso più alto, ma molto più rischioso

$$\mu_y = 95 \; > \; \mu_x = 50$$

ma

$$\sigma_y = 193.21 \; > \; \sigma_x = 43.30$$

- La Covarianza di 8250 indica che tra i due investimenti c'è una relazione positiva e varieranno nella stessa direzione

Riepilogo del Capitolo

- Definite le variabili aleatorie discrete e le distribuzioni di probabilità
- Discussa la distribuzione binomiale
- Discussa la distribuzione ipergeometrica
- Trattata la distribuzione di Poisson
- Definite covarianza e correlazione tra due variabili aleatorie
- Esaminata l'applicazione al caso di un portafoglio titoli