Statistica

Capitolo 6

Variabili Aleatorie Continue e Distribuzioni di Probabilità

Obiettivi del Capitolo

Dopo aver completato il capitolo, sarete in grado di:

- Spiegare la differenza tra una variabile aleatoria discreta ed una continua
- Descrivere le caratteristiche delle distribuzioni uniforme e normale
- Trasformare problemi relativi alla distribuzione normale in problemi relativi alla distribuzione normale standard
- Calcolare probabilità usando la tavola della distribuzione normale

Obiettivi del Capitolo

(continuazione)

Dopo aver completato il capitolo, sarete in grado di:

- Verificare l’assunzione di normalità
- Usare l’approsimazione normale per la distribuzione binomiale
- Riconoscere quando usare la distribuzione esponenziale
- Spiegare variabili distribuite congiuntamente e combinazioni lineari di variabili aleatorie

Distribuzioni di Probabilità

Distribuzioni di Probabilità

- Cap. 5 — Distribuzioni di Probabilità **Discrete**
  - Binomiale
  - Ipergeometrica
  - Poisson
- Cap. 6 — Distribuzioni di Probabilità **Continue**
  - Uniforme
  - Normale
  - Esponenziale

Distribuzioni di Probabilità Continue

- Una variabile aleatoria continua è una variabile che può assumere qualunque valore in un intervallo
  - spessore di un oggetto
  - tempo necessario per completare un lavoro
  - temperatura di una soluzione
  - altezza, in pollici
- Queste variabili possono potenzialmente assumere qualunque valore, dipendentemente solo dall'abilità di misurare con precisione.

Funzione di Ripartizione

- La Funzione di Ripartizione, F(x), per una variabile aleatoria continua X esprime la probabilità che X non superi il valore x

$$\boxed{F(x) = P(X \le x)}$$

- Siano a e b due possibili valori di X, con a < b. La probabilità che X assuma valori tra a e b è

$$\boxed{P(a < X < b) = F(b) - F(a)}$$

Funzione di Densità di Probabilità

La funzione di densità di probabilità, f(x), di una variabile aleatoria X ha le seguenti proprietà:

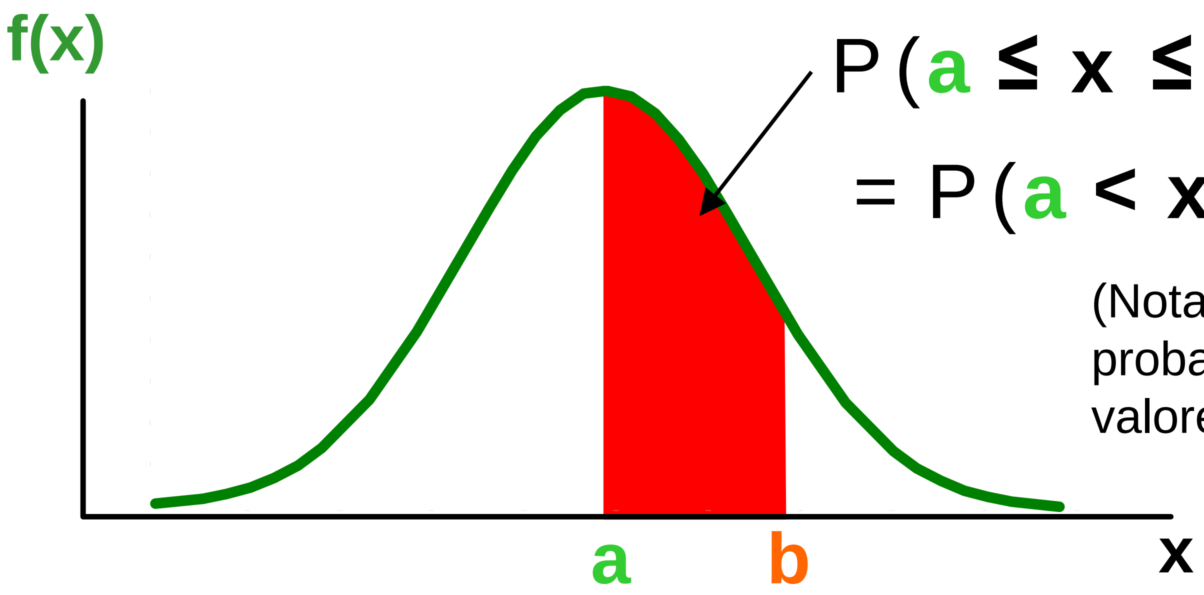
1. $f(x) > 0$ per qualunque valore di x
2. L'area sottesa alla funzione di densità di probabilità f(x) su tutto l'intervallo di valori ammissibili di X vale 1
3. La probabilità che X assuma valori in un intervallo è l'area sottesa alla funzione di densità sull'intervallo
4. La funzione di ripartizione $F(x_0)$ è l'area sottesa alla funzione di densità f(x) dal valore minimo x_m fino al valore x_0

$$\boxed{f(x_0) = \int_{x_m}^{x_0} f(x)dx}$$

dove x_m è il valore minimo della variabile aleatoria x

Probabilità come un'Area

L'area ombreggiata sottesa alla curva è la probabilità che X assuma valori fra a e b



$$P(a \leq x \leq b)$$

$$= P(a < x < b)$$

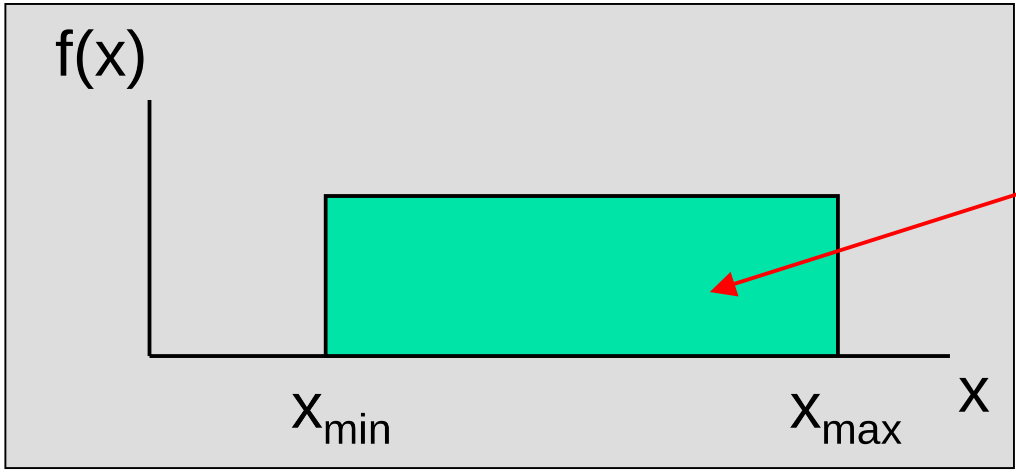
(Notare che la probabilità di un singolo valore è zero)

La Distribuzione Uniforme

- **Distribuzioni di Probabilità**
  - Distribuzioni di Probabilità **Continue**
    - Uniforme
    - Normale
    - Esponenziale

La Distribuzione Uniforme

- La distributione uniforme è la distribuzione di probabilità che assegna la stessa probabilità a tutti i possibili valori di una variabile aleatoria



L'area totale sottesa la funzione di densità della distribuzione uniforme è uguale a 1

La Distribuzione Uniforme

(continuazione)

La Distribuzione Uniforme Continua:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

dove

f(x) = valore della funzione di densità a qualunque valore x

a = valore minimo di x

b = valore massimo di x

Proprietà della Distribuzione Uniforme

- La media di una distribuzione uniforme è

$$\boxed{\mu = \frac{a+b}{2}}$$

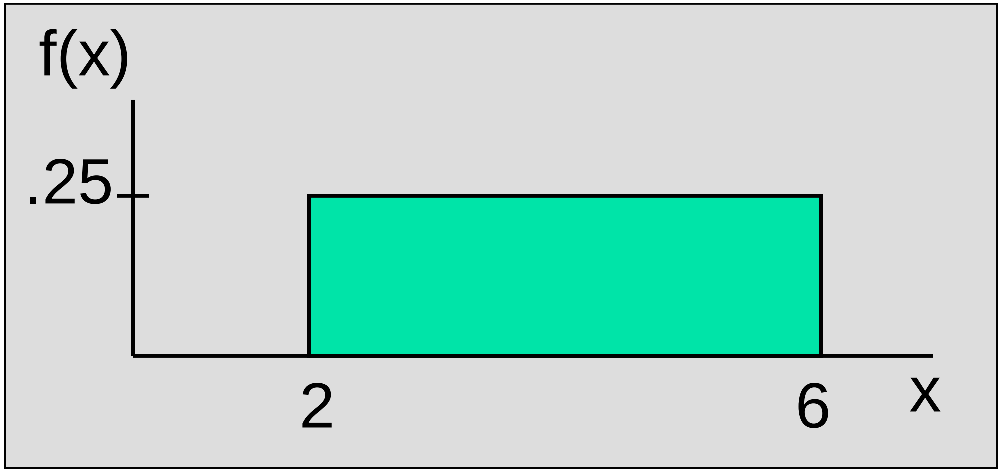
- La varianza è

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}}$$

Esempio Distribuzione Uniforme

Esempio: Distribuzione di probabilità uniforme nell'intervallo $2 \leq x \leq 6$:

$$f(x) = \frac{1}{6-2} = .25 \quad \text{per} \quad 2 \leq x \leq 6$$



$$\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{2+6}{2} = 4$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(6-2)^2}{12} = 1.333$$

Valori Attesi di Variabili Aleatorie Continue

- La media di X, indicata con μ_X, è definita come il valore atteso di X

$$\boxed{\mu_X = E(X)}$$

- La varianza di X, indicata con σ_X^2, è definita come il valore atteso del quadrato degli scarti della variabile dalla sua media, $(X - \mu_X)^2$

$$\boxed{\sigma_X^2 = E[(X - \mu_X)^2]}$$

Funzione Lineare di Variabili

- Sia $\boxed{W = a + bX}$, dove X ha media μ_X e varianza σ_X^2, e a e b sono costanti

- Allora la media di W è

$$\boxed{\mu_W = E(a + bX) = a + b\mu_X}$$

- la varianza è

$$\boxed{\sigma_W^2 = Var(a + bX) = b^2\sigma_X^2}$$

- lo scarto quadratico medio di W è

$$\boxed{\sigma_W = |b|\sigma_X}$$

Funzione Lineare di Variabili

(continuazione)

- Un importante caso speciale dei precedenti risultati è la variabile aleatoria standardizzata

$$\boxed{Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}}$$

- la quale ha media 0 e varianza 1

La Distribuzione Normale

Distribuzioni di Probabilità

- Distribuzioni di Probabilità **Continue**
  - Uniforme
  - Normale
  - Esponenziale

La Distribuzione Normale

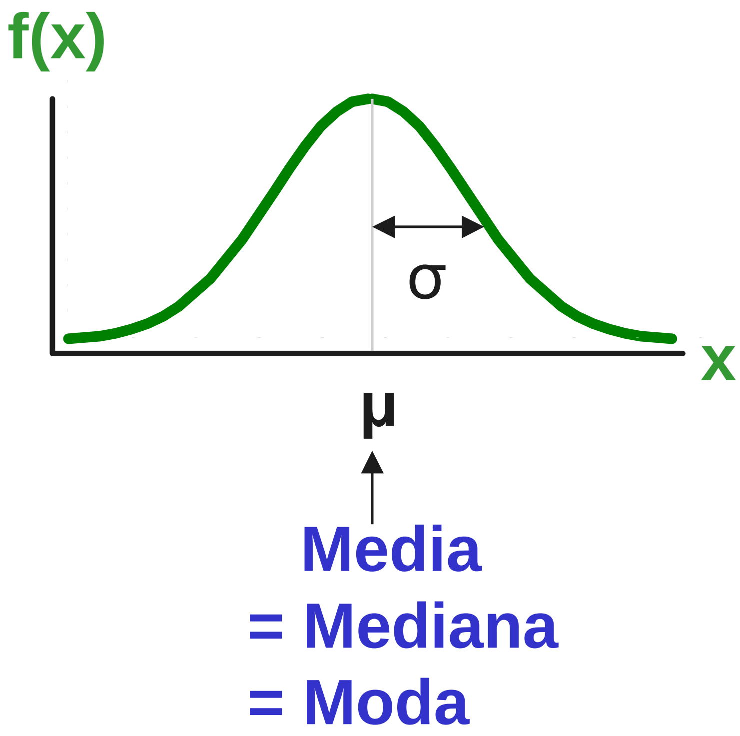
(continuazione)

- **Forma campanulare**
- **Simmetrica**
- **Media, Mediana e Moda coincidono**

La tendenza centrale è determinata dalla media, μ

La variabilità è determinata dallo scarto quadratico medio, σ

La variabile aleatoria ha un campo di variazione teoreticamente infinito:
+ ∞ fino a − ∞

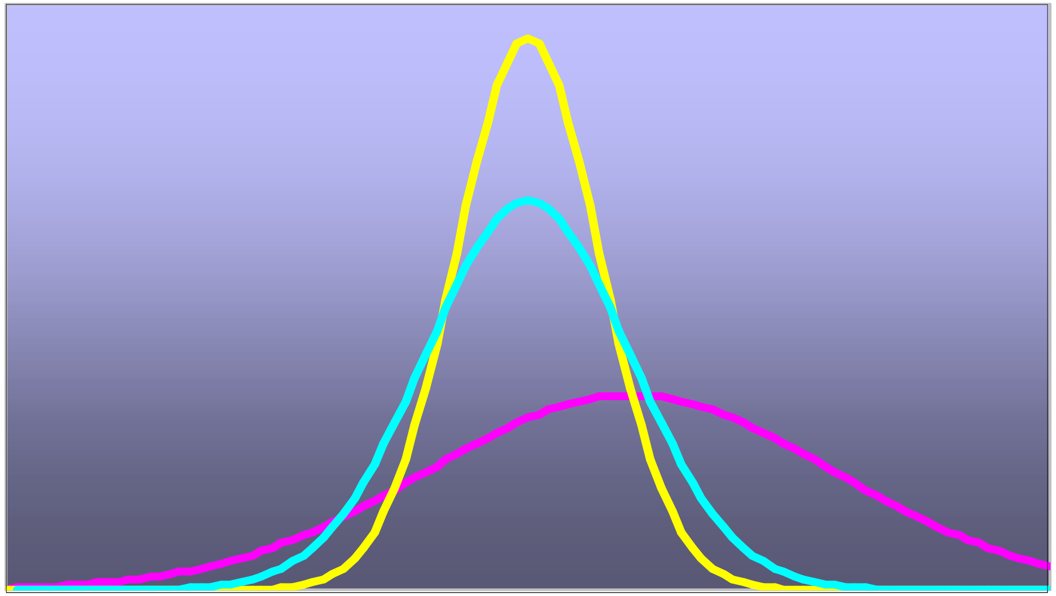


La Distribuzione Normale

(continuazione)

- La distribuzione normale approssima molto bene le distribuzioni di probabilità di un numero elevato di variabili aleatorie
- In presenza di campioni “grandi” la distribuzione delle medie campionarie è approssimata dalla distribuzione normale
- Il calcolo delle probabilità è diretto ed elegante
- La distribuzione di probabilità normale ha prodotto buone decisioni finanziarie/economiche in molti problemi applicativi

Molte Distribuzioni Normali

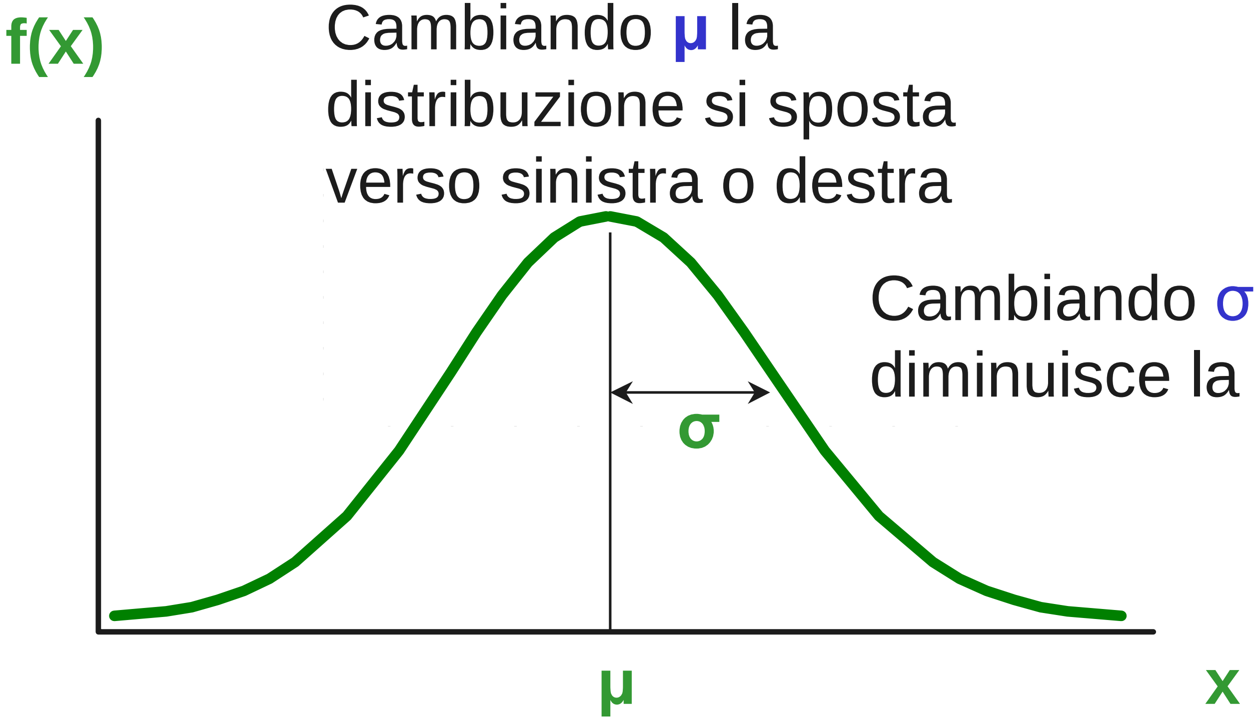


Variando i parametri μ e σ, otteniamo diverse distribuzioni normali

La Forma della Distribuzione Normale

Cambiando **μ** la distribuzione si sposta verso sinistra o destra

Cambiando **σ** aumenta o diminuisce la dispersione.



Date la media μ e la varianza σ identifichiamo la distribuzione normale con la notazione

$$\boxed{X \sim N(\mu, \sigma^2)}$$

La Funzione di Densità della Probabilità Normale

- La formula per la funzione di densità di probabilità normale è

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

Dove e = la costante matematica approssimata da 2.71828

π = la costante matematica approssimata da 3.14159

μ = la media della popolazione

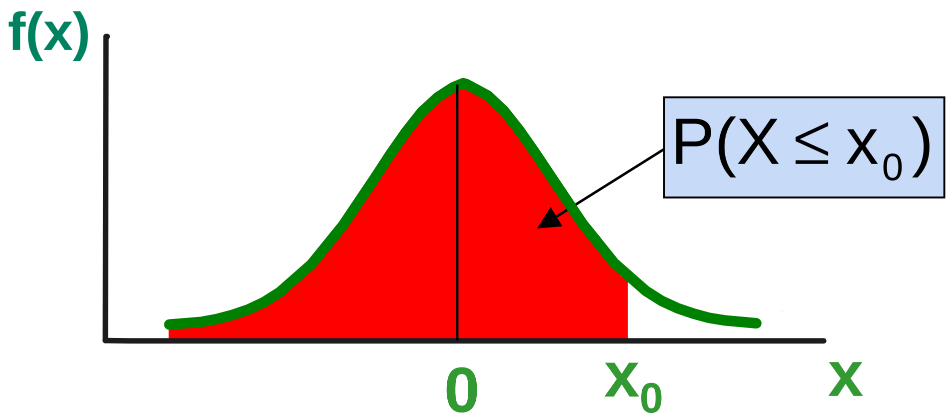
σ = lo scarto quadratico medio della popolazione

x = qualunque valore della variabile continua, $-\infty < x < \infty$

Funzione di Ripartizione Normale

- Per una variabile aleatoria normale X con media μ e varianza σ^2 , i.e., $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, la funzione di ripartizione è

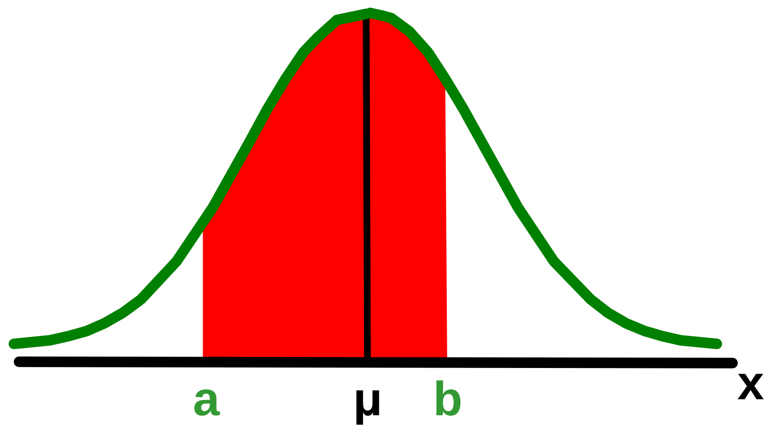
$$\boxed{F(x_0) = P(X \le x_0)}$$



Calcolo delle Probabilità per la Distribuzione Normale

La probabilità relativa ad un intervallo di valori è misurata dall'area sottesa alla curva

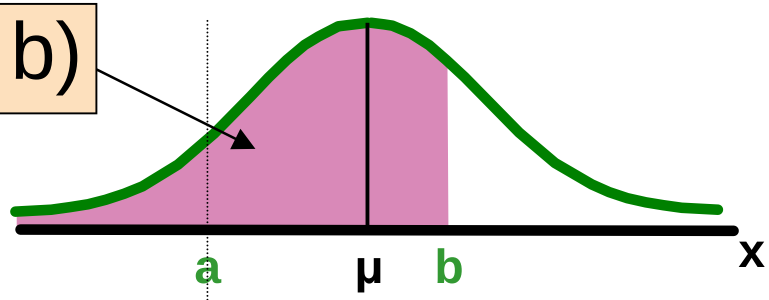
$$\boxed{P(a < X < b) = F(b) - F(a)}$$



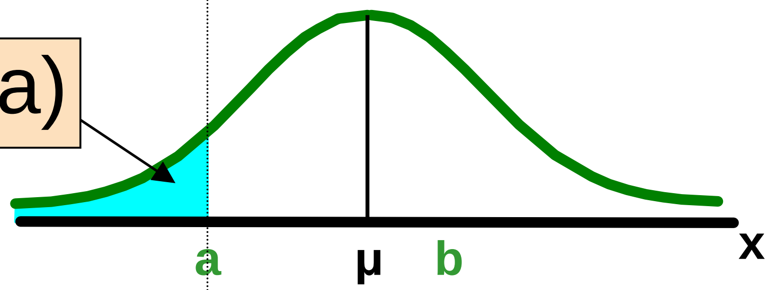
Calcolo delle Probabilità per la Distribuzione Normale

(continuazione)

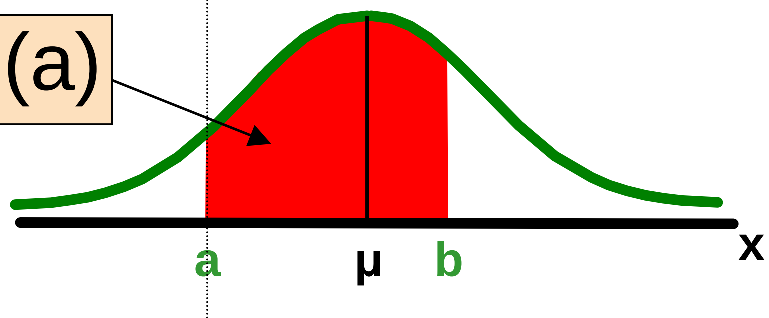
$$F(b) = P(X < b)$$



$$F(a) = P(X < a)$$



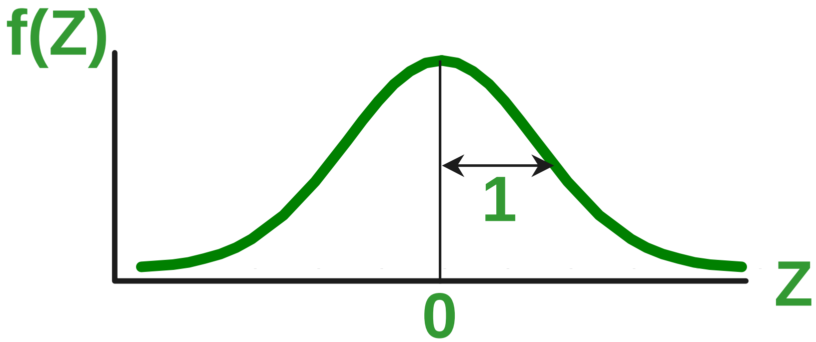
$$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$



La Normale Standard

- Qualunque distribuzione normale (con qualunque combinazione di media e varianza) può essere transformata nella distribuzione normale standard (Z), con media 0 e varianza 1

$$Z \sim N(0{,}1)$$



- Dobbiamo trasformare la variabile X nella variabile Z sottraendo la media di X e dividendo per il suo scarto quadratico medio

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

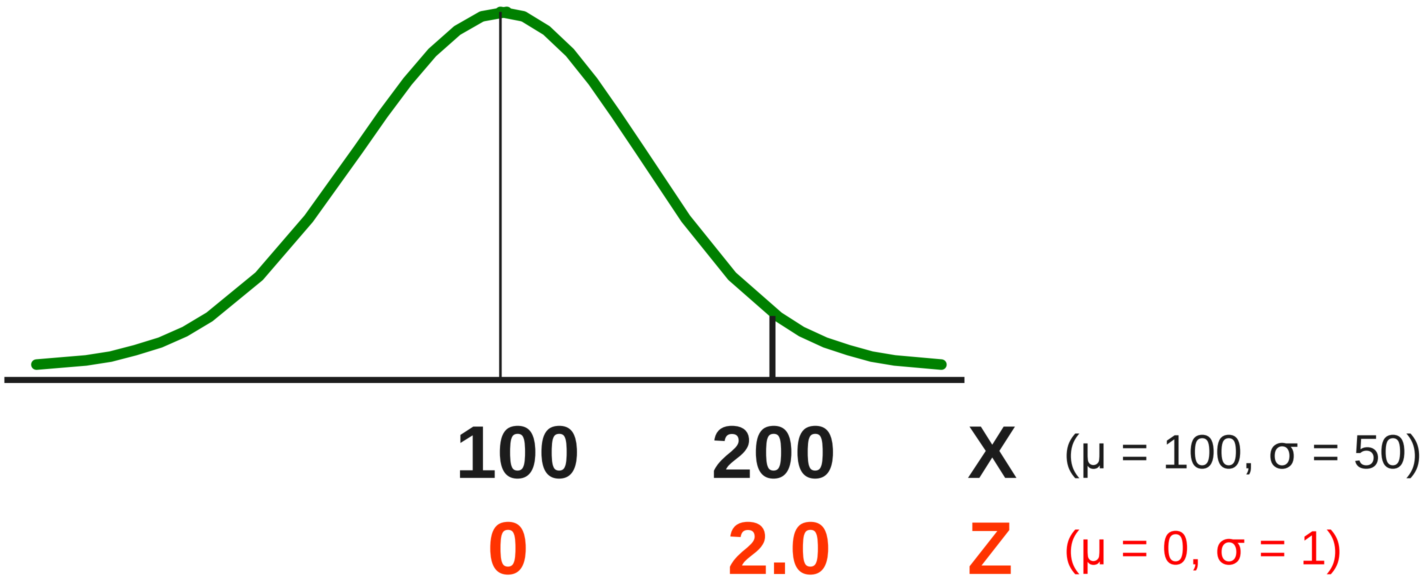
Esempio

- Se X ha una distribuzione normale con media 100 e scarto quadratico medio 50, il valore di Z corrispondente a X = 200 è

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{200 - 100}{50} = 2.0$$

- Ciò significa che X = 200 è due scarti quadratici medi (2 incrementi di 50 unità) al di sopra del valore medio 100.

Confrontando le unità di X e Z

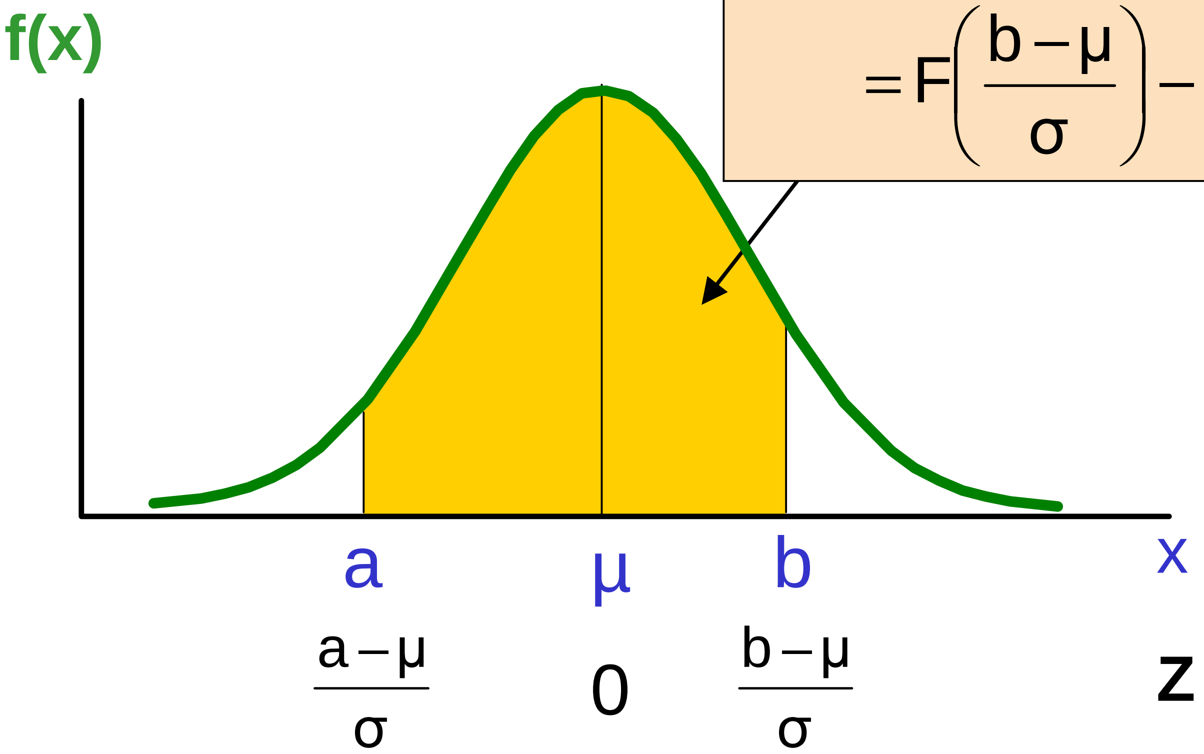


Notare che la distribuzione è la stessa, ed è cambiata solo la scala. Possiamo formulare il problema usando le unità originali (X) o le unità standardizzate (Z).

Calcolo delle Probabilità Normali

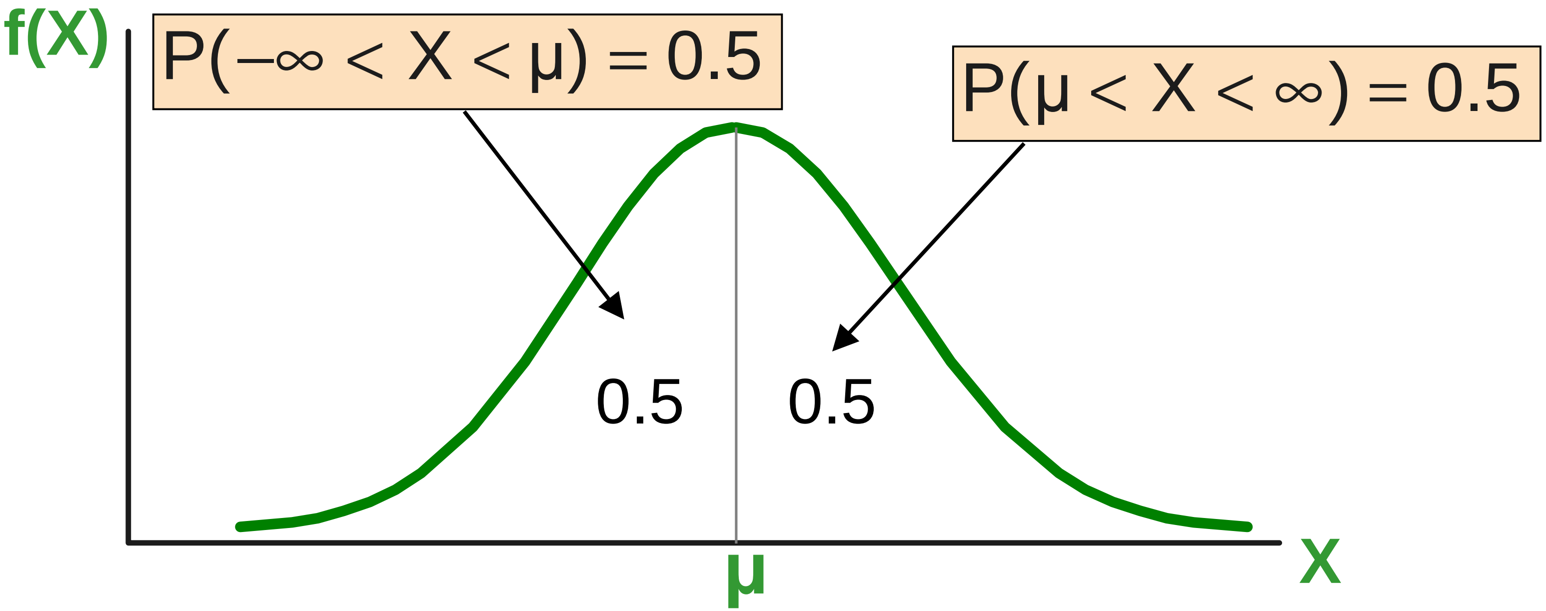
$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= F\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - F\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$



Probabilità come Area Sottesa alla Curva

L' area totale sottesa alla curva è pari a 1, e la curva è simmetrica, perciò metà è al di sopra della media, e metà è al di sotto

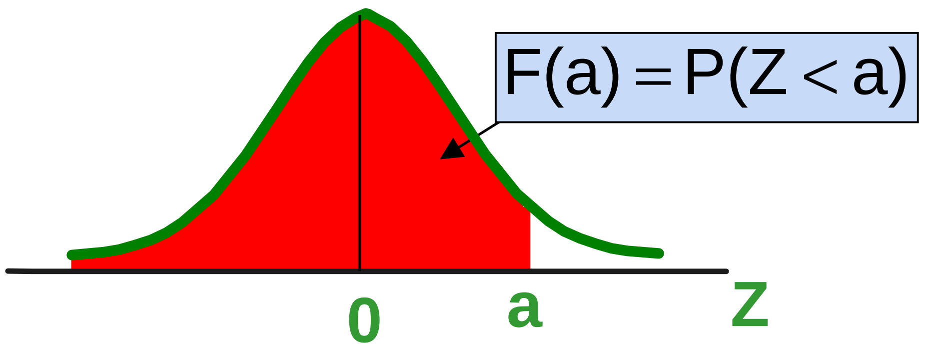


$$P(-\infty < X < \infty) = 1.0$$

Tavola 1 dell'Appendice

- La tavola della Normale Standard data nel libro (Tavola 1 dell'Appendice) fornisce i valori della funzione di ripartizione della distribuzione normale
- Per un dato valore a di Z, la tavola fornisce F(a)

  (l'area sottesa alla curva da meno infinito al valore a)

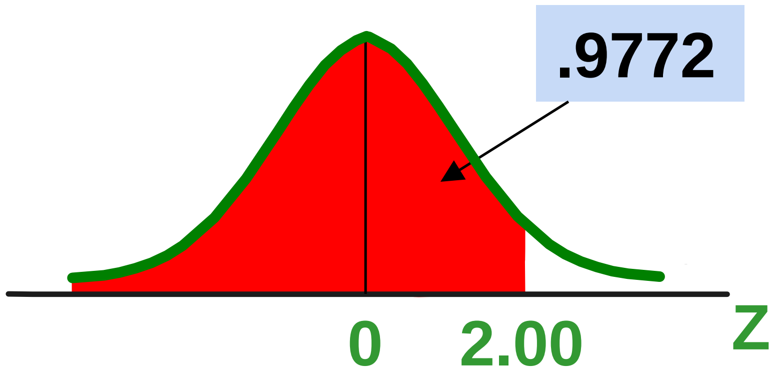


La Tavola della Normale Standard

- Tavola 1 dell'Appendice fornisce la probabilità F(a) per qualunque valore a

Esempio:

$P(Z < 2.00) = .9772$



La Tavola della Normale Standard

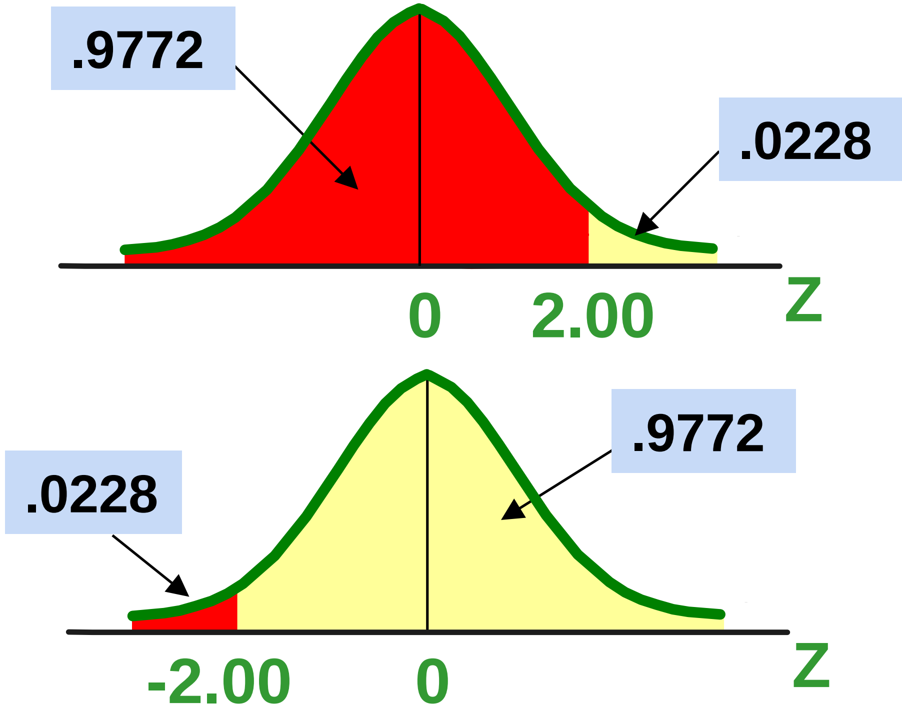
(continuazione)

- Per valori negativi di Z, usiamo il fatto che la distribuzione è simmetrica per trovare la probabilità desiderata:

Esempio:

$P(Z < -2.00) = 1 - 0.9772$

$= 0.0228$



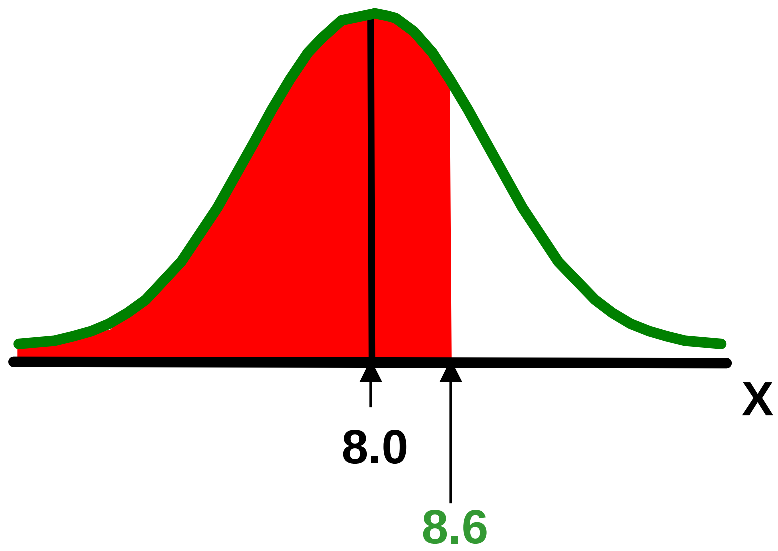
Procedura Generale per Calcolare Probabilità

Per calcolare $P(a < X < b)$ quando X ha una distribuzione normale:

- Disegna la curva normale per il problema in termini di X
- Traduci i valori di X in valori di Z
- Usa la Tavola della Funzione di Ripartizione

Calcolo delle Probabilità Normali

- Assumiamo che X abbia una distribuzione normale con media 8 e scarto quadratico medio 5
- Calcolare $P(X < 8.6)$

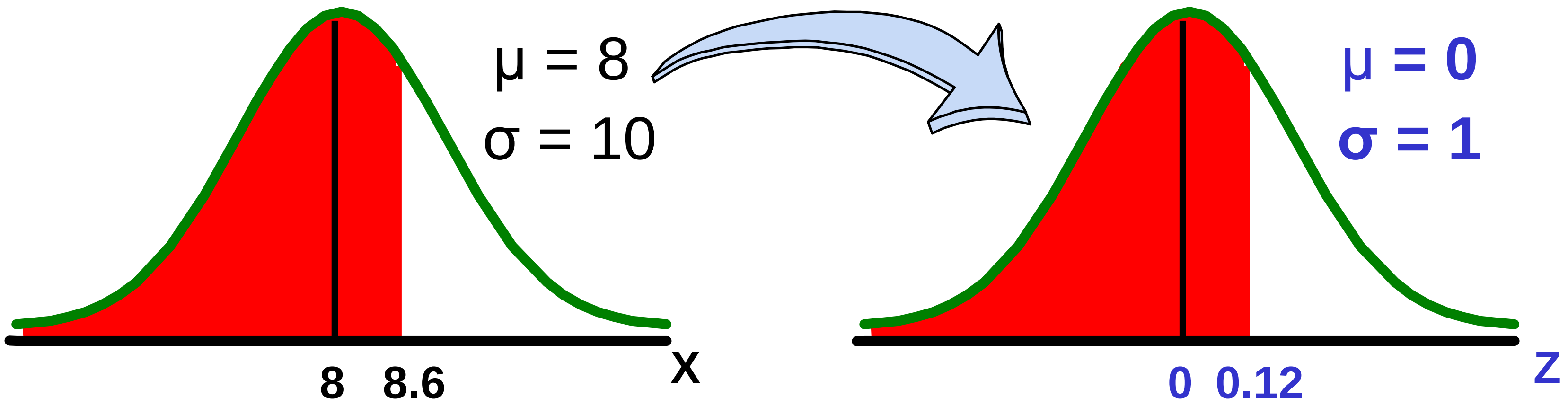


Calcolo delle Probabilità Normali

(continued)

- Assumiamo che X abbia una distribuzione normale con media 8 e scarto quadratico medio 5. Calcolare P(X<8.6)

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{8.6-8.0}{5.0} = 0.12$$



P(X < 8.6) P(Z < 0.12)

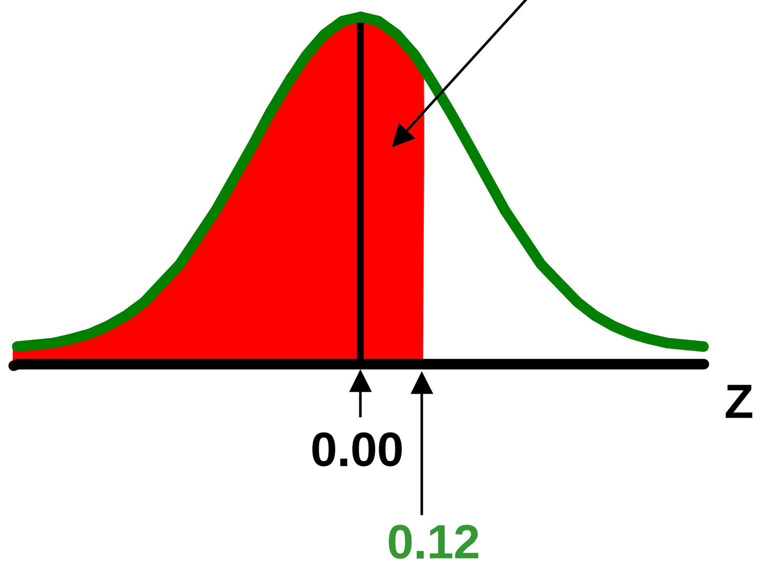
Soluzione: calcolo di P(Z < 0.12)

Tavola della Distribuzione Normale Standard

z	F(z)
.10	.5398
.11	.5438
.12	.5478
.13	.5517

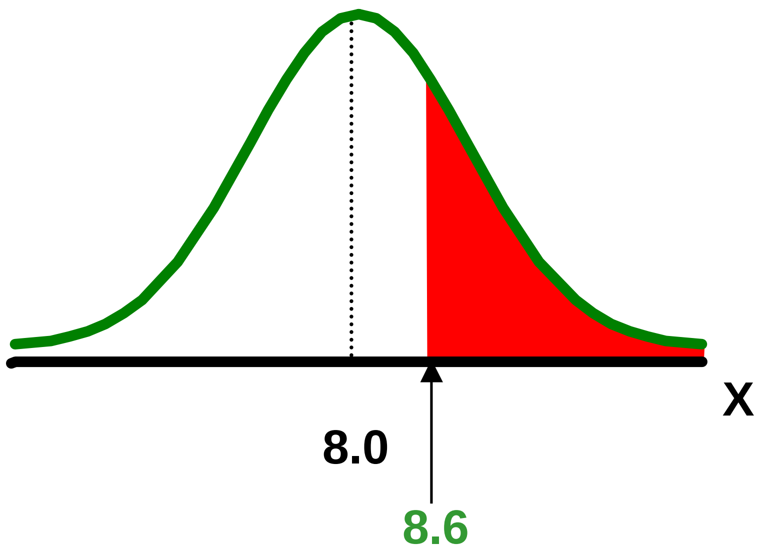
P(X < 8.6)
= P(Z < 0.12)

F(0.12) = 0.5478



Probabilità nella Coda di Destra

- Assumiamo che X abbia una distribuzione normale con media 8 e scarto quadratico medio 5
- Adesso calcoliamo $P(X > 8.6)$



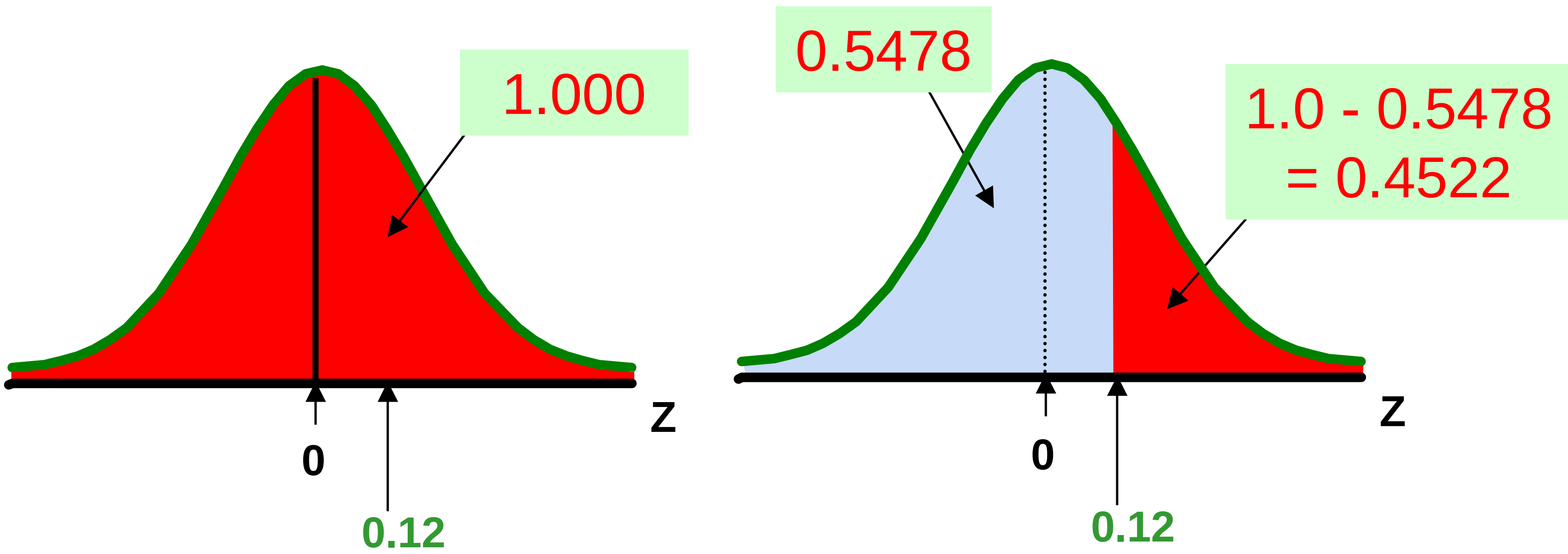
Probabilità nella Coda di Destra

(continuazione)

- Adesso calcoliamo P(X > 8.6)…

$$P(X > 8.6) = P(Z > 0.12) = 1.0 - P(Z \le 0.12)$$

$$= 1.0 - 0.5478 = \boxed{0.4522}$$



Trovare il Valore di X Corrispondente ad una Nota Probabilità

- I passi per trovare il valore di X corrispondente ad una nota probabilità:
  1. Trovare il valore di Z corrispondente alla probabilità nota
  2. Converti nelle unità di X usando la formula:

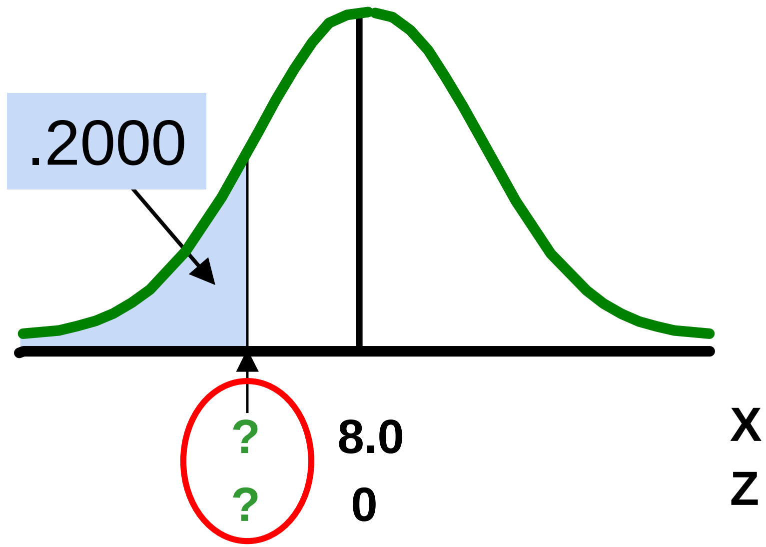
$$\boxed{X = \mu + Z\sigma}$$

Trovare il Valore di X Corrispondente ad una Nota Probabilità

(continuazione)

Esempio:

- Assumiamo che X abbia una distribuzione normale con media 8 e scarto quadratico medio 5.
- Adesso troviamo il valore di X tale che solo il 20% dei valori siano al di sotto di tale X



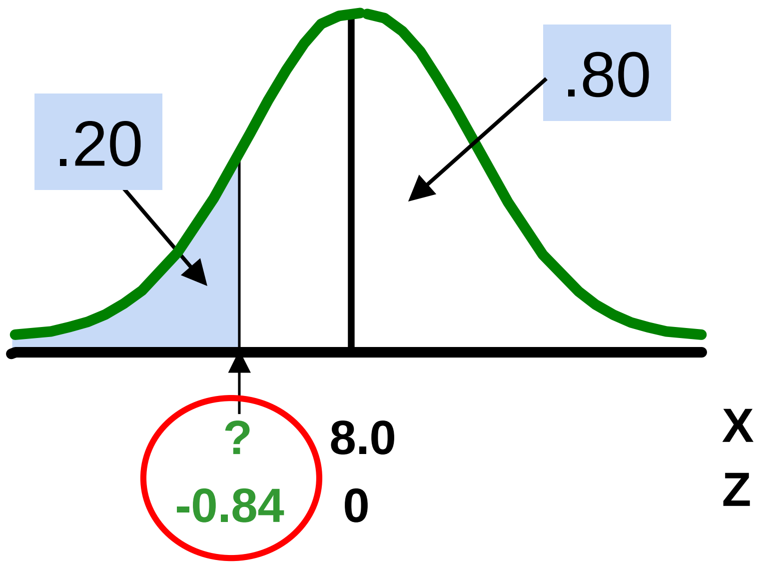
Trova il valore di Z corrispondente a 20% nella coda di sinistra

1. Trova il valore di Z corrispondente alla nota probabilità

Tavola della Funzione di Ripartizione Normale (Porzione)

z	F(z)
.82	.7939
.83	.7967
.84	.7995
.85	.8023

- 20% di area nella coda di sinistra corrisponde al valore Z di -0.84



Trovare il valore di X

2. Converti in unità di X usando la formula:

$$\begin{aligned} X &= \mu + Z\sigma \\ &= 8 + (-0.84)5 \\ &= 3.8 \end{aligned}$$

Perciò 20% dei valori di una distribuzione con media 8 e scarto quadratico medio 5 sono inferiori a 3.8

Verificare la Normalità

- Non tutte le variabili aleatorie continue hanno una distribuzione normale

- È importante valutare quanto i dati reali siano approssimabili in modo valido dalla distribuzione normale

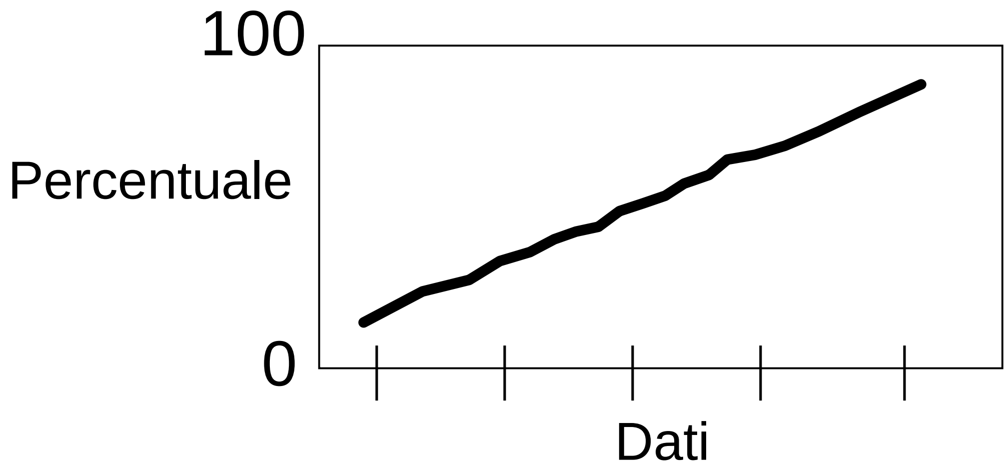
Il Normal Probability Plot

- Normal probability plot
  - Ordina i dati dal più basso al più alto
  - Calcola la funzione di ripartizione per tutti i valori
  - Esamina un grafico dei valori osservati vs. le probabilità cumulate (con la funzione di ripartizione della distribuzione normale sull'asse verticale e i valori osservati sull'asse orizzontale)
  - Valuta il grafico per evidenze di linearità

Il Normal Probability Plot

(continuazione)

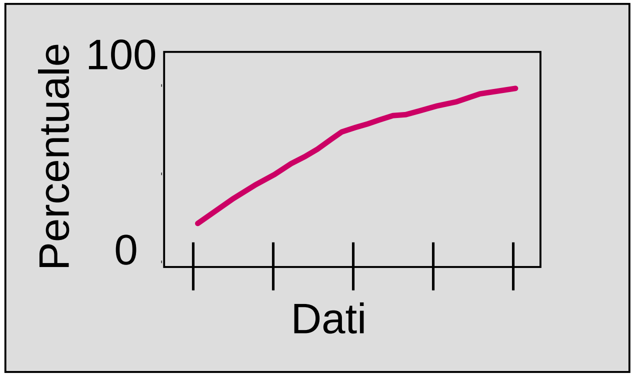
Un normal probability plot per i dati provenienti da una distribuzione normale appare approssimativamente lineare:



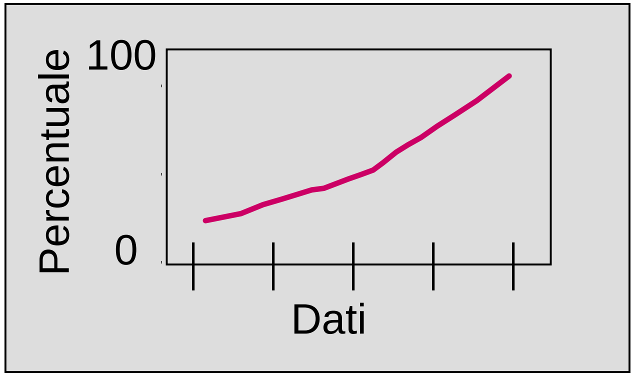
Il Normal Probability Plot

(continuazione)

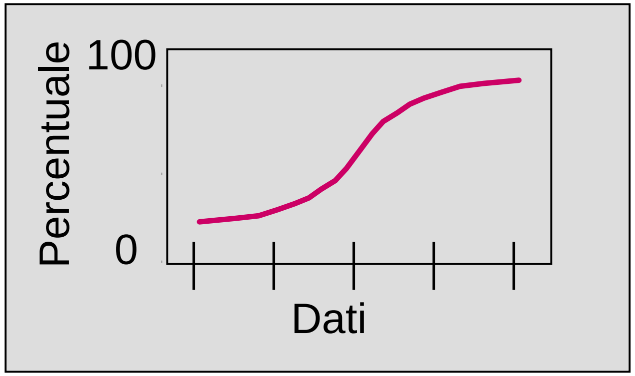
Asimmetria a Sinistra



Asimmetria a Destra



Uniforme



Grafici non lineari indicano una deviazione dalla normalità

Approssimazione della Distribuzione Binomiale con la Distribuzione Normale

- Ricorda la distribuzione binomiale:
  - n prove indipendenti
  - probabilità di successo in ogni prova = P

- Variabile aleatoria X:
  - X_i =1 se la i^{ma} prova è un "successo"
  - X_i =0 se la i^{ma} prova è un "insuccesso"

$$\boxed{E(X) = \mu = nP}$$

$$\boxed{Var(X) = \sigma^2 = nP(1-P)}$$

Approssimazione della Distribuzione Binomiale con la Distribuzione Normale

(continuazione)

- La forma della distribuzione binomiale è approssimativamente normale se n è grande

- La normale è una buona approssimazione per la binomiale quando $nP(1 – P) > 9$

- Standardizza per ottenere Z usando i parametri della distribuzione binomiale:

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{Var(X)}} = \frac{X - np}{\sqrt{nP(1-P)}}$$

Approssimazione della Distribuzione Binomiale con la Distribuzione Normale

(continuazione)

- Sia X il numero di successi in n indipendenti prove, ciascuna con probabilità di successo P.

- Se $nP(1 - P) > 9$,

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a - nP}{\sqrt{nP(1-P)}} \le Z \le \frac{b - nP}{\sqrt{nP(1-P)}} \right)$$

Esempio Approssimazione Binomiale

- 40% di tutti i votanti sostengono proposta A. Qual'è la probabilità che, in un campione di n = 200, una percentuale compresa tra 76 e 80 dei votanti indicherà il loro sostegno?
  - $E(X) = \mu = nP = 200(0.40) = 80$
  - $Var(X) = \sigma^2 = nP(1 - P) = 200(0.40)(1 - 0.40) = 48$

    (notare: $nP(1 - P) = 48 > 9$)

$$
\begin{aligned}
P(76 < X < 80) &= P\left(\frac{76-80}{\sqrt{200(0.4)(1-0.4)}} \le Z \le \frac{80-80}{\sqrt{200(0.4)(1-0.4)}}\right) \\
&= P(-0.58 < Z < 0) \\
&= F(0) - F(-0.58) \\
&= 0.5000 - 0.2810 = 0.2190
\end{aligned}
$$

La Distribuzione Esponenziale

- **Distribuzioni di Probabilità**
  - Distribuzioni di Probabilità **Continue**
    - Normale
    - Uniforme
    - Esponenziale

La Distribuzione Esponenziale

- Usata per modellare l'ammontare di tempo tra due occorrenze di un evento (il tempo fra gli arrivi)

  - Esempi:
    - Tempo tra camion che arrivano ad un molo di scarico
    - Tempo tra transazioni ad un bancomat
    - Tempo tra telefonate all'operatore principale

La Distribuzione Esponenziale

(continuazione)

- La variabile aleatoria esponenziale T (t>0) ha una densità di probabilità

$$\boxed{f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad \text{per} \quad t > 0}$$

- Dove
  - λ è il numero medio di occorrenze in una unità di tempo
  - t è il numero di unità di tempo fino alla prossima occorrenza
  - e = 2.71828
- Si dice che T ha una distribuzione di probabilità esponenziale

La Distribuzione Esponenziale

- Definita da un solo parametro, la sua media λ (lambda)

- La funzione di ripartizione (la probabilità che un tempo di arrivo è minore di qualche specifico tempo t) è

$$\boxed{F(t) = 1 - e^{-\lambda t}}$$

dove e = costante matematica approssimata da 2.71828
λ = il numero medio di arrivi per unità nella popolazione
t = qualunque valore della variabile continua dove $t > 0$

Esempio
Distribuzione Esponenziale

Esempio: I clienti arrivano allo sportello di servizio ad un tasso di 15 per ora. Qual'è la probabilità che il tempo di arrivo fra clienti consecutivi sia inferiore a tre minuti?

- Il numero medio di arrivi per ora è 15, quindi $\lambda = 15$
- Tre minuti sono .05 ore
- P(tempo di arrivo < .05) $= 1 - e^{-\lambda X} = 1 - e^{-(15)(.05)} = \boxed{0.5276}$
- Perciò c'è una probabilità del 52.76% che il tempo di arrivo fra clienti consecutivi sia inferiore a tre minuti

Funzione di Ripartizione Congiunta

- Siano $X_1, X_2, \ldots X_k$ variabili aleatorie continue

- La loro funzione di ripartizione congiunta,

  $$F(x_1, x_2, \ldots x_k)$$

  definisce la probabilità che, simultaneamente, X_1 sia minore di x_1, X_2 sia minore di x_2, …; cioè

$$\boxed{F(x_1, x_2, \ldots, x_k) = P(X_1 < x_1 \cap X_2 < x_2 \cap \cdots X_k < x_k)}$$

Funzione di Ripartizione Congiunta

(continuazione)

- Le funzioni di ripartizione congiunta

  $F(x_1), F(x_2), \ldots, F(x_k)$

  delle singole variabili aleatorie sono chiamate funzioni di ripartizione marginale

- Le variabili aleatorie sono indipendenti se e solo se

$$\boxed{F(x_1, x_2, \ldots, x_k) = F(x_1)F(x_2)\cdots F(x_k)}$$

Covarianza

- Siano X e Y variabili aleatorie continue, con rispettive medie μ_x e μ_y

- Il valore atteso di $(X - \mu_x)(Y - \mu_y)$ viene chiamato covarianza tra X e Y

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)]}$$

- Un espressione alternativa ma equivalente è

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - \mu_x\mu_y}$$

- Se le variabili X e Y sono indipendenti, allora la covarianza fra loro è 0. Comunque, il viceversa non è sempre vero.

Correlazione

- Siano X e Y variabili aleatorie distribuite congiuntamente.

- La correlazione tra X e Y è

$$\boxed{\rho = \mathrm{Corr}(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}}$$

Somma di Variabili Aleatorie

Siano date k variabili aleatorie $X_1, X_2, \ldots X_k$ con medie $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k$ e varianze $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_k^2$. Allora:

- La media della loro somma è la somma delle loro medie

$$\boxed{E(X_1 + X_2 + \cdots + X_k) = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k}$$

Somma di Variabili Aleatorie

(continuazione)

Siano date k variabili aleatorie $X_1, X_2, \ldots X_k$ con medie $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k$ e varianze $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_k^2$. Allora:

- Se la covarianza fra ogni coppia di queste variabili aleatorie è 0, allora la varianza della loro somma è la somma delle loro varianze

$$\mathrm{Var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_k) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_k^2$$

- Comunque, se le covarianze fra le coppie di variabili non sono 0, la varianza della loro somma è

$$\mathrm{Var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_k) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_k^2 + 2\sum_{i=1}^{K-1}\sum_{j=i+1}^{K}\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

Differenza tra Due Variabili Aleatorie

Per due variabili aleatorie, X e Y

- La media della loro differenza è la differenza fra le loro medie; cioè

$$E(X - Y) = \mu_X - \mu_Y$$

- Se la covarianza tra X e Y è 0, allora la varianza della loro differenza è

$$Var(X - Y) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$$

- Se la covarianza tra X e Y non è 0, allora la varianza della loro differenza è

$$Var(X - Y) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2Cov(X, Y)$$

Combinazioni Lineari di Variabili Aleatorie

- Una combinazione lineare di due variabili aleatorie, X e Y, (dove a e b sono constanti) è

$$\boxed{W = aX + bY}$$

- La media di W è

$$\boxed{\mu_W = E[W] = E[aX + bY] = a\mu_X + b\mu_Y}$$

Combinazioni Lineari di Variabili Aleatorie

(continuazione)

- La varianza di W è

$$\boxed{\sigma_W^2 = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2 + 2ab\mathrm{Cov}(X,Y)}$$

- Oppure usando la correlazione,

$$\boxed{\sigma_W^2 = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2 + 2ab\mathrm{Corr}(X,Y)\sigma_X\sigma_Y}$$

- Se entrambe X e Y sono distribuite normalmente allora anche la combinazione lineare, W, sarà distribuita normalmente

Esempio

- Due mansioni devono essere eseguite dallo stesso lavoratore.
  - X = minuti per completare mansione 1; $\mu_x = 20$, $\sigma_x = 5$
  - Y = minuti per completare mansione 2; $\mu_y = 20$, $\sigma_y = 5$
  - X e Y sono distribuite normalmente e sono indipendenti

- Quali sono la media e lo scarto quadratico medio del tempo necessario per completare entrambe le mansioni?

Esempio

(continuazione)

- X = minuti per completare mansione 1; $\mu_x = 20$, $\sigma_x = 5$
- Y = minuti per completare mansione 2; $\mu_y = 30$, $\sigma_y = 8$

- Quali sono la media e lo scarto quadratico medio del tempo necessario per completare entrambe le mansioni?

$$\boxed{W = X + Y}$$

$$\boxed{\mu_W = \mu_X + \mu_Y = 20 + 30 = 50}$$

- Siccome X e Y sono indipendenti, Cov(X,Y) = 0, perciò

$$\boxed{\sigma_W^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\mathrm{Cov}(X,Y) = (5)^2 + (8)^2 = 89}$$

- Lo scarto quadratico medio è

$$\boxed{\sigma_W = \sqrt{89} = 9.434}$$

Riepilogo del Capitolo

- Definite le variabili aleatorie continue
- Presentate importanti distribuzioni di probabilità continue e le loro proprietà
  - uniforme, normale, esponenziale
- Calcolate probabilità usando formule e tabelle
- Interpretati normal probability plot
- Esaminate situazioni in cui usare le diverse distribuzioni
- Applicata l’approssimazione normale alla distribuzione binomiale
- Riviste le proprietà delle variabili aleatorie continue distribuite congiuntamente