Statistica

Capitolo 10

Verifica di Ipotesi
su una Singola Popolazione

Obiettivi del Capitolo

Dopo aver completato il capitolo, sarete in grado di:

- Formulare ipotesi nulla ed ipotesi alternativa per applicazioni relative a
  - media di una singola popolazione con distribuzione normale
  - proporzione di una singola popolazione (grandi campioni)
- Formulare una regola di decisione per la verifica di ipotesi
- Usare l’approccio basato sul valore critico e quello basato sul p-value per la verifica di ipotesi (sia per problemi di media che di proporzione)
- Comprendere gli errori di primo e di secondo tipo
- Valutare la potenza di un test

Cos'è un'ipotesi?

- Un'ipotesi è una affermazione (assunzione) circa un parametro della popolazione:

  - media della popolazione

Esempio: in questa città, il costo medio della bolletta mensile per il cellulare è μ = $42

  - proporzione della popolazione

Esempio: In questa città, la proporzione di adulti con il cellulare è p = .68

L'ipotesi Nulla, H_0

- Rappresenta l'ipotesi (numerica) che deve essere verificata

> Esempio: il numero medio di TV nelle case americane è uguale a tre ($H_0 : \mu = 3$)

- Si riferisce sempre al parametro della popolazione, non alla statistica campionaria

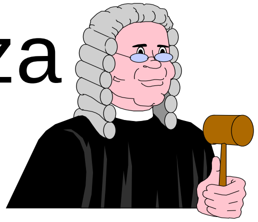
$$H_0 : \mu = 3$$

$$H_0 : \cancel{\bar{X} = 3}$$

L’ipotesi Nulla, H_0

(continuazione)

- Iniziamo con l’assunzione che l’ipotesi nulla sia vera
  - Simile alla nozione di innocenza a meno che venga dimostrata la colpevolezza



- Si riferisce allo status quo
- Contiene sempre “=” , “≤” o “≥”
- Può essere rifiutata o meno

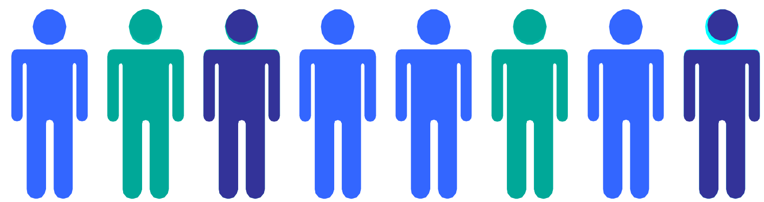
L'Ipotesi Alternativa, H_1

- È l'opposto dell'ipotesi nulla
  - e.g., Il numero medio di TV nelle case americane non è uguale a 3 (H_1: $\mu \neq 3$)
- Sfida lo status quo
- Non contiene mai "=" , "≤" o "≥"
- È generalmente l'ipotesi che il ricercatore sta cercando di dimostrare

Processo della Verifica di Ipotesi

Affermazione: **l'età media della popolazione è 50. (Ipotesi nulla:**

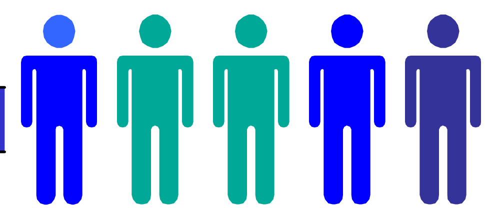
H_0: $\mu = 50$)



Popolazione

Adesso selezioniamo un campione casuale

È probabile ottenere $\bar{x} = 20$ se $\mu = 50$?



Campione

Supponiamo l'età media del campione sia 20: $\bar{x} = 20$

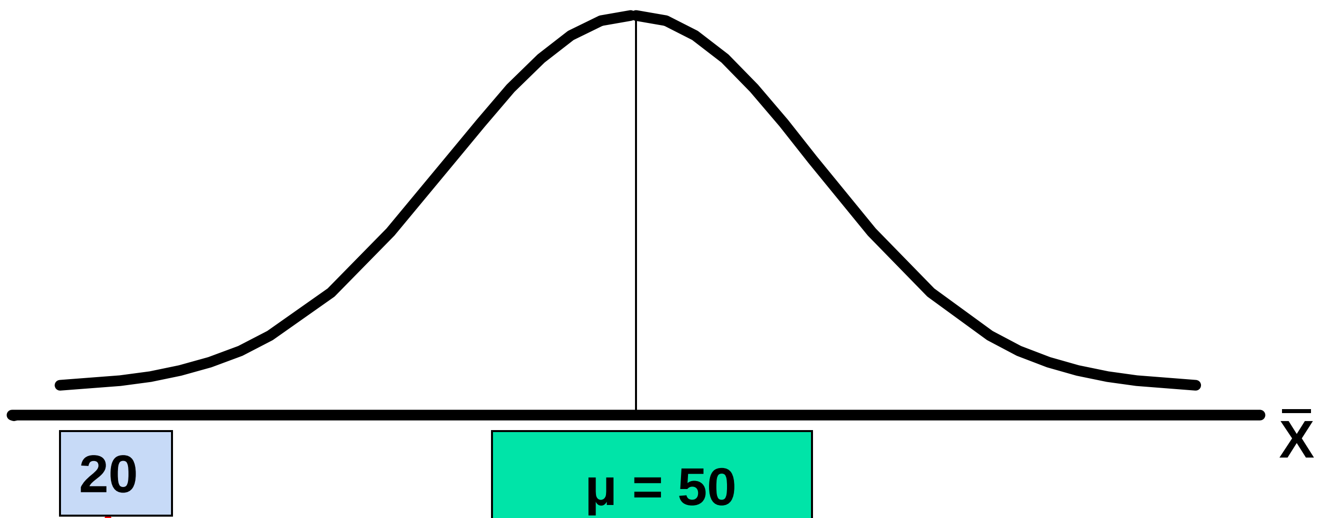
Se non è probabile,

SI RIFIUTA

l'Ipotesi Nulla

Motivazione per Rifiutare H_0

Distribuzione Campionaria di $\bar{X}$



$\mu = 50$
Se H_0 è vera

Se non è probabile che si possa ottenere questo valore per la media campionaria...

... quando questa è la vera media della popolazione…

... allora rifiutiamo l’ipotesi nulla che $\mu = 50$.

Livello di Significatività, α

- **Definisce i valori della statistica campionaria che sono improbabili se l'ipotesi nulla è vera**
  - Definisce la regione di rifiuto della distribuzione campionaria
- È indicato con α (livello di significatività)
  - Valori comuni sono .01, .05, o .10
- Fissato a priori dal ricercatore
- Fornisce il(i) valore(i) critico(i) del test

Livello di Significatività e Regione di Rifiuto

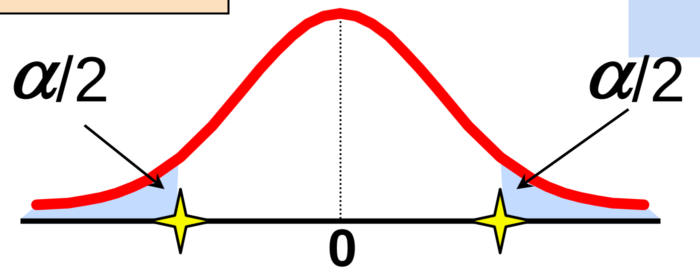
Livello di significatività = α

Rappresenta i valori critici

La regione di rifiuto è ombreggiata

H_0: $\mu = 3$

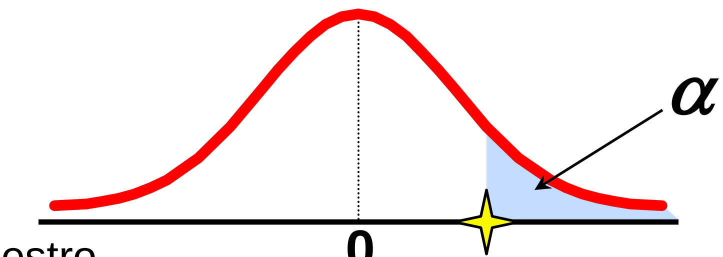
H_1: $\mu \neq 3$



Test a due code

H_0: $\mu \leq 3$

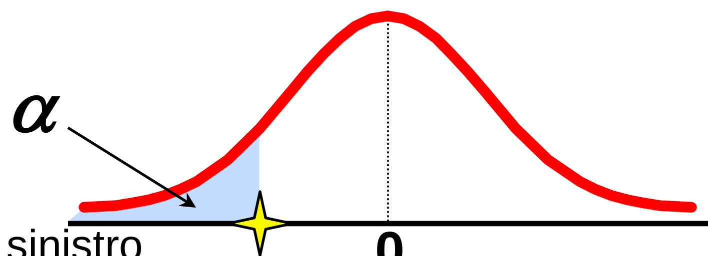
H_1: $\mu > 3$



Test unilaterale destro

H_0: $\mu \geq 3$

H_1: $\mu < 3$



Test unilaterale sinistro

Errori nel Processo Decisionale

- **Errore di Primo Tipo**
  - Rifiutare un'ipotesi nulla vera
  - Considerato un tipo di errore molto serio

La probabilità dell'errore di primo tipo è α

- Chiamato livello di significatività del test
- Fissato a priori dal ricercatore

Errori nel Processo Decisionale

(continuazione)

- **Errore di Secondo Tipo**
  - Non rifiutare un'ipotesi nulla falsa

La probabilità dell'errore di secondo tipo è β

Risultati e Probabilità

Legenda:
Risultato
(Probabilità)

Possibili Risultati Verifica di Ipotesi		
	Stato di Natura	
Decisione	H_0 Vera	H_0 Falsa
Non Rifiutare H_0	**Decisione corretta** **$(1 - \alpha)$**	**Errore di Secondo Tipo** **(β)**
Rifiutare H_0	**Errore di Primo Tipo** **(α)**	**Decisione corretta** **$(1 - \beta)$**

Relazione fra
Errore di Primo e di Secondo tipo

- L'errore di primo tipo e l'errore di secondo tipo non si possono verificare contemporaneamente
  - L'errore di primo tipo può verificarsi solo se H_0 è vera
  - L'errore di secondo tipo può verificarsi solo se H_0 è falsa

Se la probabilità dell'errore di primo tipo (α) $\Uparrow$,

allora la probabilità dell'errore di secondo tipo (β) $\Downarrow$

Fattori che Influenzano l'Errore di Secondo Tipo

- A parità di tutte le altre condizioni,
  - β ⇧ quando la differenza fra il valore ipotizzato per il parametro e il vero valore ⇩
  - β ⇧ quando α ⇩
  - β ⇧ quando σ ⇧
  - β ⇧ quando n ⇩

Potenza del Test

- La potenza di un test è la probabilità di rifiutare un'ipotesi nulla che è falsa

i.e., Potenza = P(Rifiutare H_0 | H_1 è vera)

  - La potenza di un test aumenta quando la dimensione del campione aumenta

Verifica di Ipotesi sulla Media

Verifica di Ipotesi su μ

- **σ nota**
- **σ non nota**

Verifica di Ipotesi sulla Media (σ nota)

- Convertire il risultato campionario ($\bar{x}$) in valori di Z

Verifica di Ipotesi su μ

σ nota | **σ non nota**

Si consideri il test

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu > \mu_0$$

(Assumiamo che la popolazione abbia distribuzione normale)

La regola di decisione è:

$$\text{Rifiutare } H_0 \text{ se } z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > z_\alpha$$

Regola di Decisione

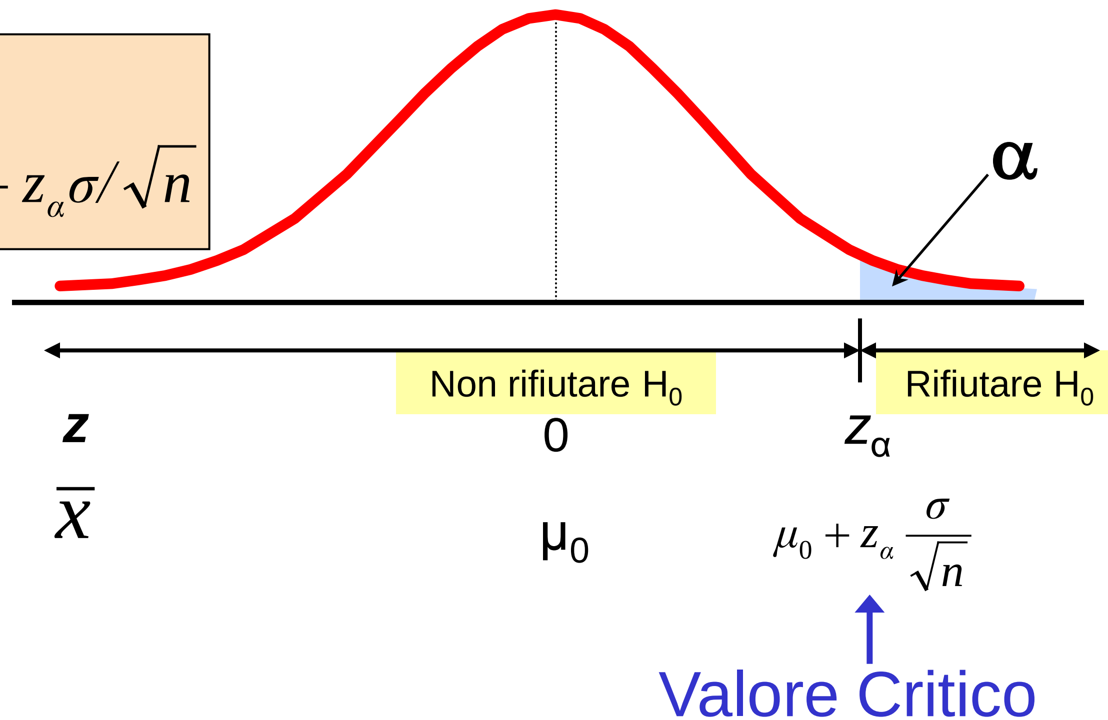
$$\text{Rifiutare } H_0 \text{ se } z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > z_\alpha$$

H_0: $\mu = \mu_0$

H_1: $\mu > \mu_0$

Regola Alternativa:

$$\text{Rifiutare } H_0 \text{ se } \bar{x} > \mu_0 + z_\alpha \sigma / \sqrt{n}$$



Approccio del p-value alla Verifica di Ipotesi

- p-value: Probabilità di ottenere un valore della statistica test uguale o più estremo (≤ o ≥) del valore fornito dal campione, assumendo che H_0 sia vera
  - Anche chiamato livello di significatività osservato
  - Il valore di α per il quale H_0 può essere rifiutata, dato il valore osservato della statistica campionaria

Approccio del p-value alla Verifica di Ipotesi

(continuazione)

- Convertire il risultato campionario (e.g., $\bar{x}$) in valori della statistica test (e.g., statistica Z)

- Ottenere il p-value
  - Per un test sulla coda destra:

$$\text{p-value} = P\left(Z > \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}, \text{ assumendo } H_0 \text{ vera}\right)$$

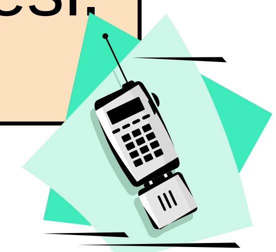
$$= P\left(Z > \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

- Regola di Decisione: confrontare il p-value con α

Se p-value < α , si rifiuta H_0

Esempio: Test Z unilaterale (destro) sulla Media (σ nota)

Un manager di una compagnia telefonica ritiene che la bolletta mensile per il cellulare dei suoi clienti sia aumentata e che in media sia ora al di sopra di \$52 al mese. La compagnia desidera verificare questa ipotesi. (Assumiamo σ = 10 sia nota)



Formare il sistema di ipotesi:

H_0: $\mu \le 52$ la media mensile non è maggiore di \$52

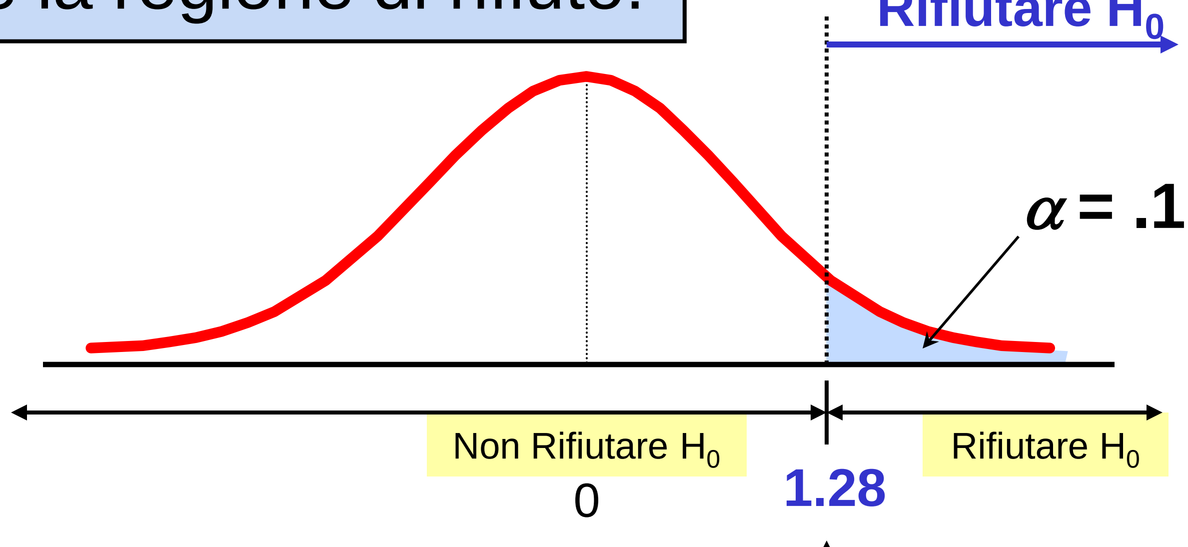
H_1: $\mu > 52$ la media mensile è maggiore di \$52
(i.e., esistono sufficienti evidenze per sostenere l'ipotesi del manager)

Esempio: Regione di Rifiuto

(continuazione)

- Assumiamo che per il test sia stato scelto $\alpha = .10$

Trovare la regione di rifiuto:



$$\text{Rifiutare} \quad H_0 \text{ se } z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} > 1.28$$

Esempio: Risultati Campionari

(continuazione)

- Selezionare il campione e calcolare la statistica test

Supponiamo che dal campione estratto si ottengano i seguenti risultati: $n = 64$, $\bar{x} = 53.1$ ($\sigma = 10$ si assume nota)

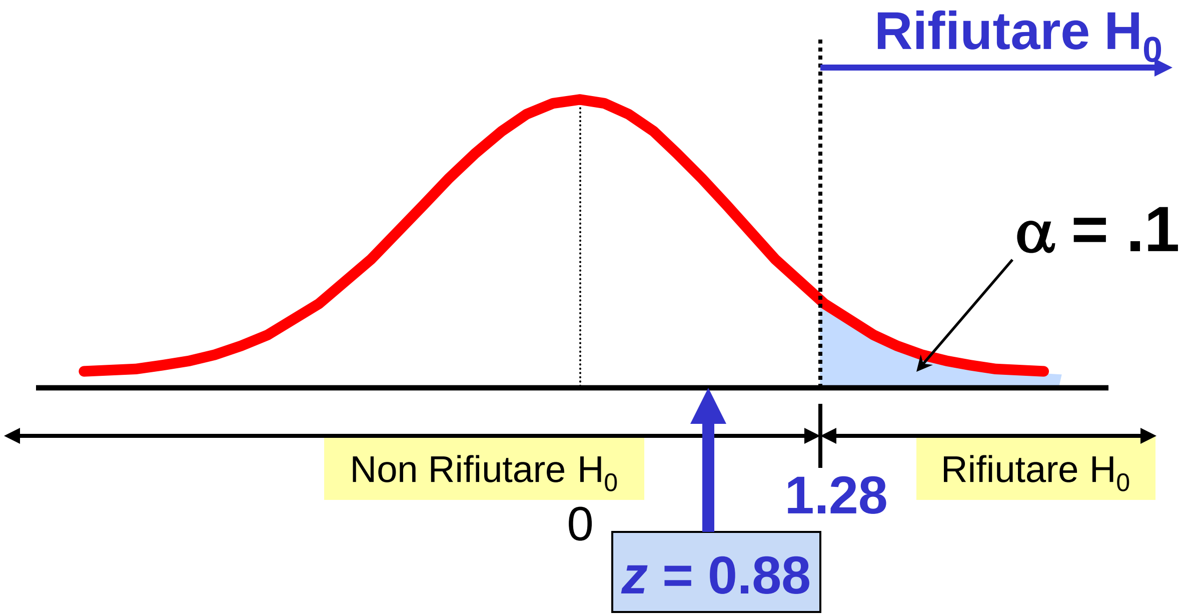
- Usando i risultati campionari,

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{53.1 - 52}{\dfrac{10}{\sqrt{64}}} = 0.88$$

Esempio: Decisione

(continuazione)

- Prendere una decisione ed interpretare i risultati:



Non si rifiuta H_0 siccome z = 0.88 < 1.28

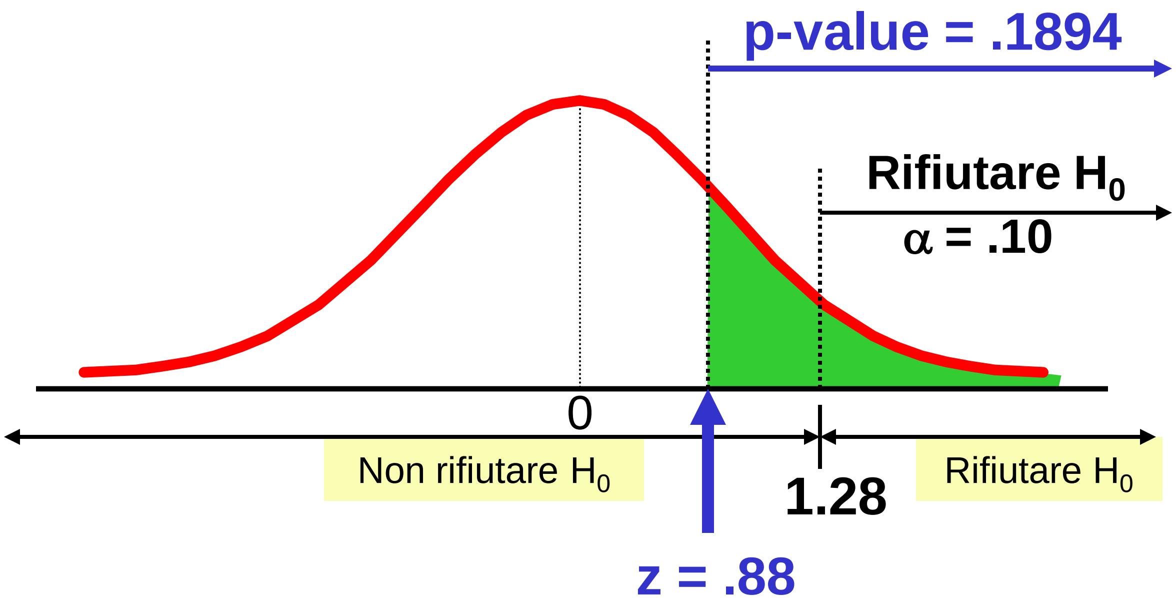
i.e.: non ci sono sufficienti evidenze che la bolletta media sia superiore a $52

Esempio: Soluzione tramite p-value

(continuazione)

Calcolare il p-value e confrontarlo con α

(assumiamo che μ = 52.0)



$$P(\bar{x} \geq 53.1 \mid \mu = 52.0)$$

$$= P\left(z \geq \frac{53.1 - 52.0}{10/\sqrt{64}} \right)$$

$$= P(z \geq 0.88) = 1 - .8106$$

$$= .1894$$

Non si rifiuta H_0 siccome il p-value = .1894 > α = .10

Test Unilaterali

- In molti casi, l'ipotesi alternativa si concentra su una particolare direzione

$H_0: \mu \leq 3$

$H_1: \mu > 3$

Questo è un test unilaterale destro siccome l'ipotesi alternativa considera valori sulla coda destra, al di sopra della media 3

$H_0: \mu \geq 3$

$H_1: \mu < 3$

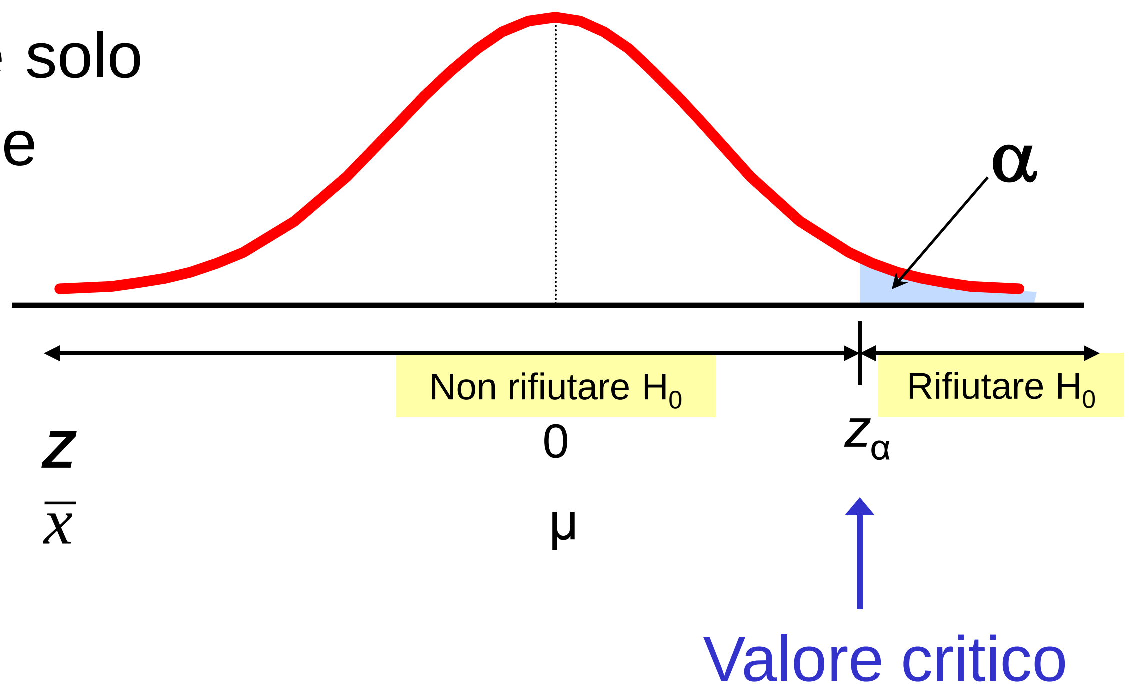
Questo è un test unilaterale sinistro siccome l'ipotesi alternativa considera valori sulla coda sinistra, al di sotto della media 3

Test Unilaterale Destro

- C'è solo un valore critico, siccome l'area di rifiuto è solo in una delle code

H_0: $\mu \leq 3$

H_1: $\mu > 3$

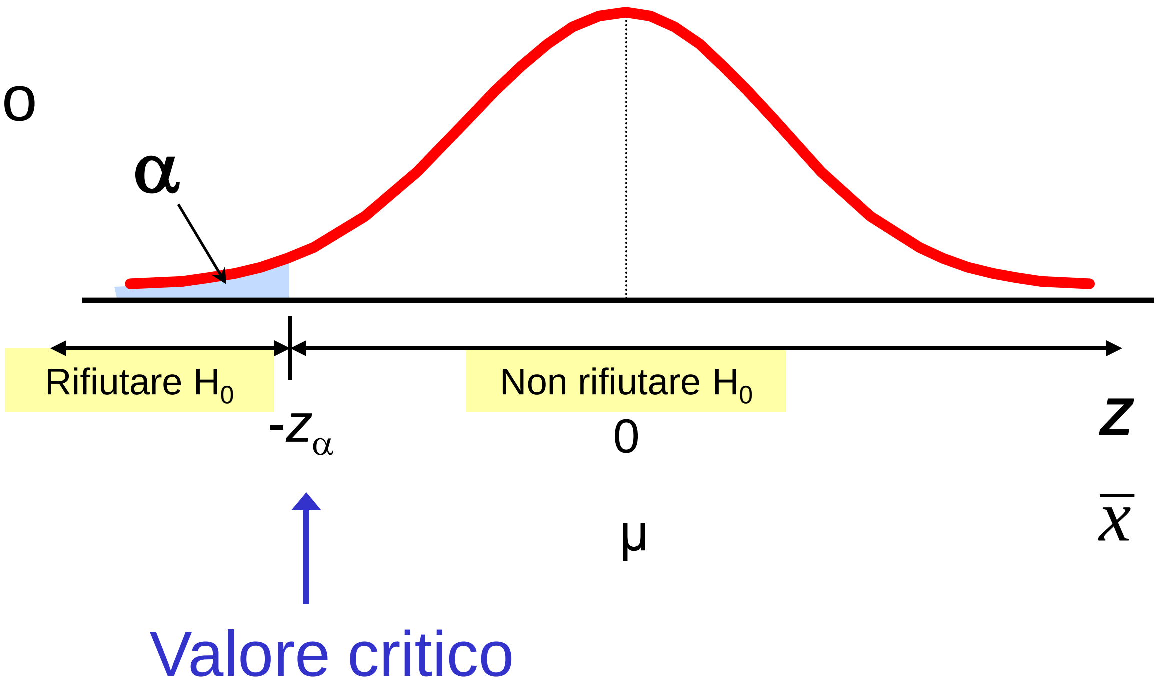


Test Unilaterale Sinistro

- C'è solo un valore critico, siccome l'area di rifiuto è solo in una delle code

H_0: μ ≥ 3

H_1: μ < 3

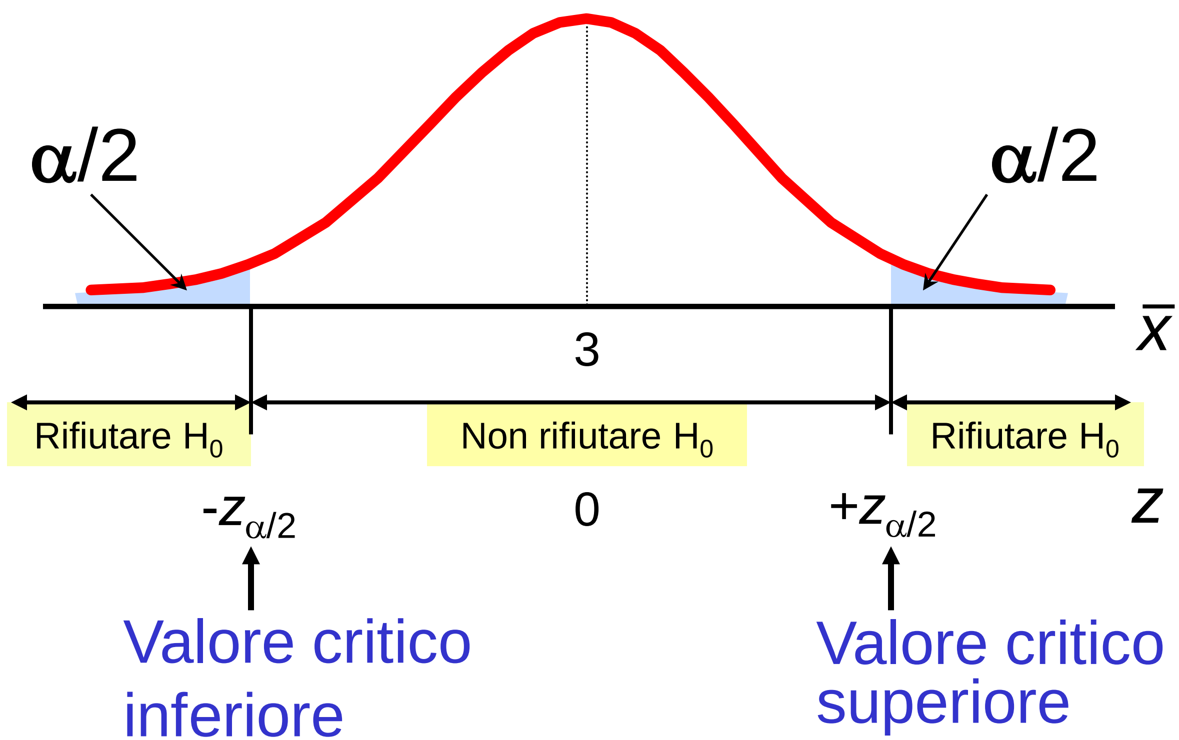


Test Bilaterale

- In alcune situazioni, l'ipotesi alternativa non specifica un'unica direzione

H_0: μ = 3
H_1: μ ≠ 3

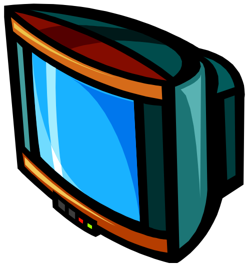
- Ci sono due valori critici che definiscono le due regioni di rifiuto



Esempio: Verifica di Ipotesi

Verificare l'ipotesi che il vero numero medio di TV nelle case americane sia uguale a 3. (Assumiamo σ = 0.8)

- Fornire le appropriate ipotesi nulla ed alternativa
  - H_0: μ = 3 , H_1: μ ≠ 3 (Si tratta di un test bilaterale)
- Specificare il livello di significatività desiderato
  - Supponiamo che per questo test venga scelto α = .05
- Scegliere la dimensione del campione
  - Supponiamo di selezionare un campione di ampiezza n = 100.



Esempio: Verifica di Ipotesi

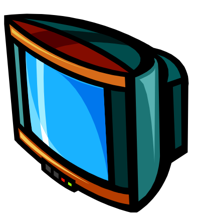
(continuazione)

- Determinare la tecnica appropriata
  - σ è nota quindi si tratta di un test Z
- Calcolare i valori critici
  - Per α = .05 i valori critici di z sono 1.96
- Rilevare i dati campionari e calcolare la statistica test
  - Supponiamo i risultati campionari siano

    n = 100, $\bar{x}$ = 2.84 (σ = 0.8 si assume nota)

Quindi la statistica test vale:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{2.84 - 3}{\frac{0.8}{\sqrt{100}}} = \frac{-.16}{.08} = -2.0$$

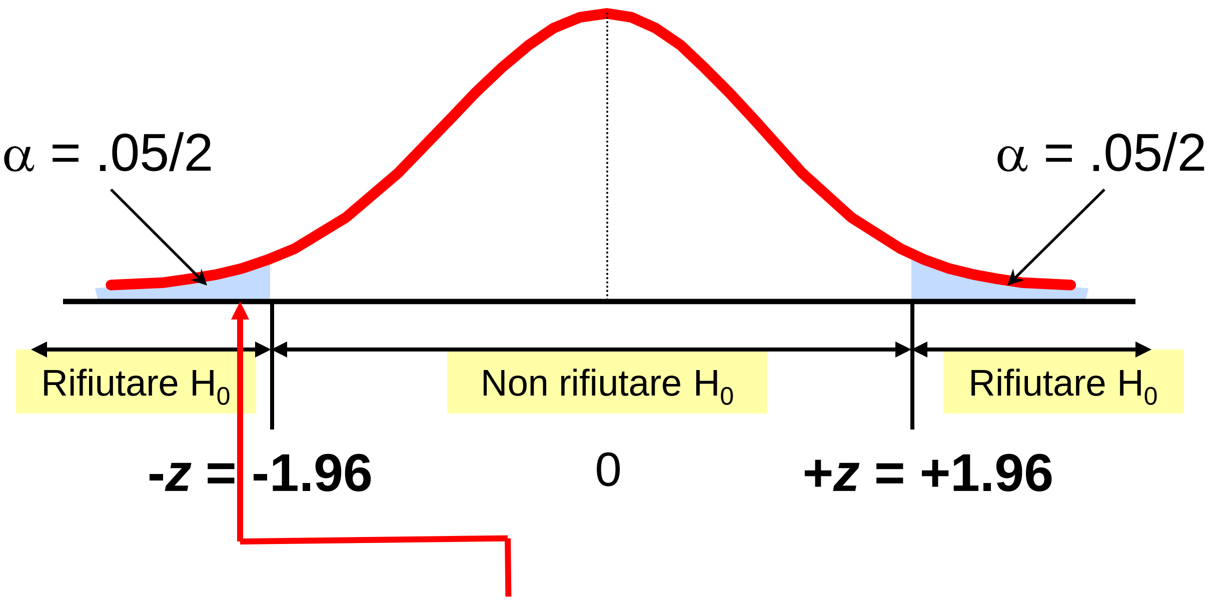


Esempio: Verifica di Ipotesi

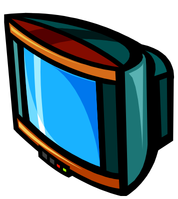
(continuazione)

- La statistica test cade nella regione di rifiuto?

Rifiutare H_0 se z < -1.96 o z > 1.96; altrimenti non rifiutare H_0



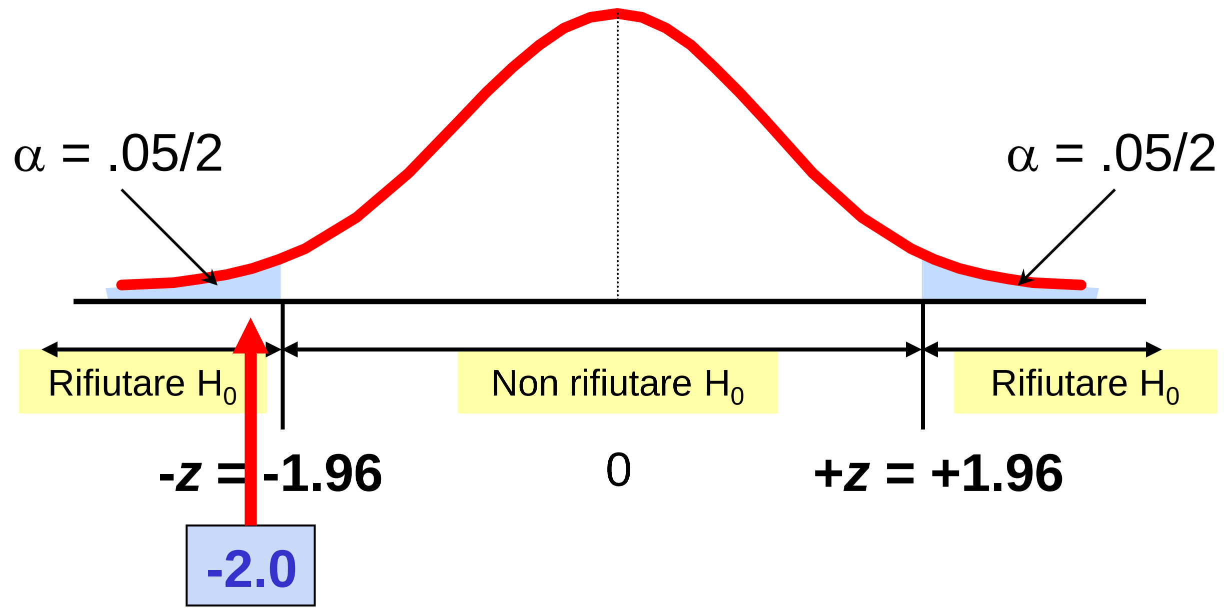
Poiché z = -2.0 < -1.96, la statistica test cade nella regione di rifiuto



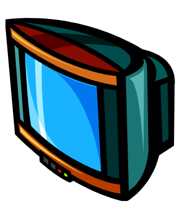
Esempio: Verifica di Ipotesi

(continuazione)

- Prendere una decisione ed interpretare il risultato



Siccome $z = -2.0 < -1.96$, rifiutiamo l'ipotesi nulla e concludiamo che ci sono sufficienti evidenze che il numero medio di TV nelle case americane non sia uguale 3.



Esempio: p-value

- Esempio: Qual è la probabilità di osservare una media campionaria di 2.84 (o un valore più lontano dalla media, in entrambe le direzioni) se la vera media è $\mu = 3.0$?

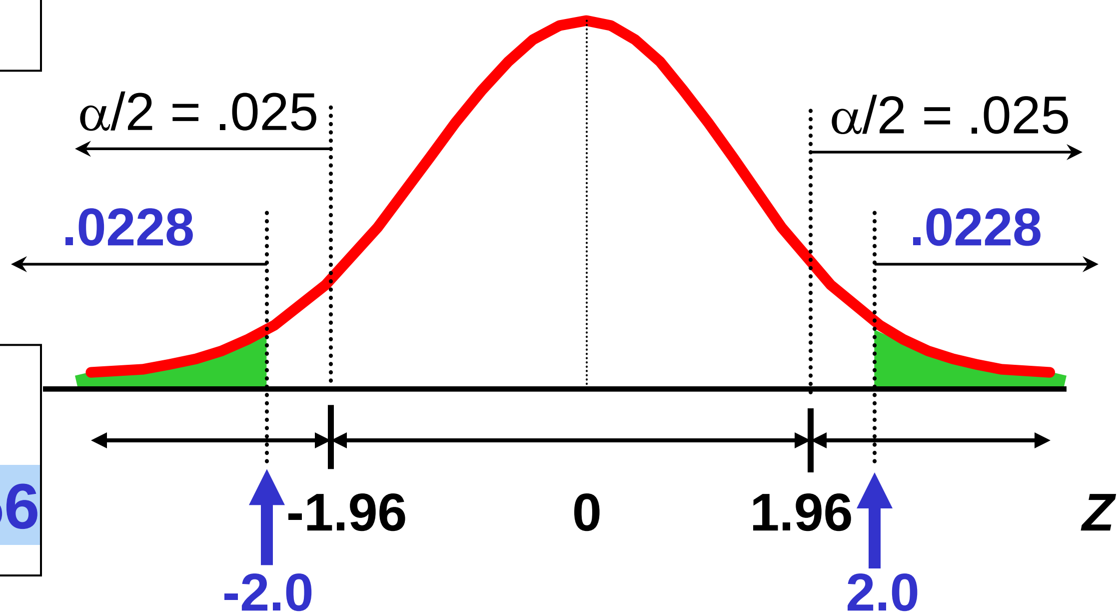
$\bar{x} = 2.84$ viene tradotto in un valore $z = -2.0$

$$P(z < -2.0) = .0228$$

$$P(z > 2.0) = .0228$$

p-value

= .0228 + .0228 = .0456



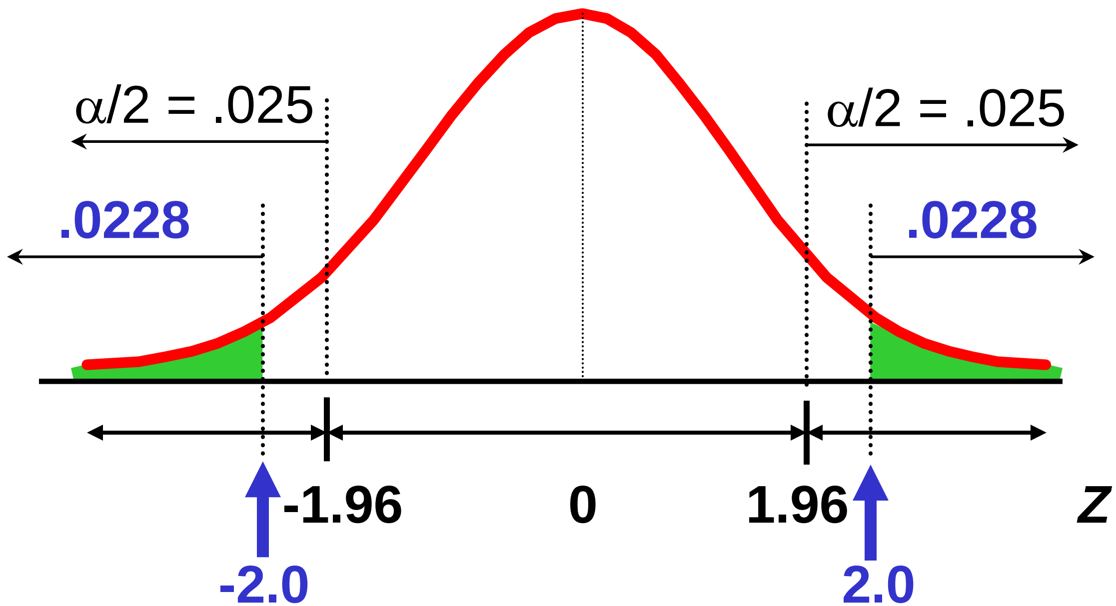
Esempio: p-value

(continuazione)

- Confrontare il p-value con α
  - Se p-value < α , rifiutare H_0

Qui: p-value = .0456
α = .05

Siccome .0456 < .05, rifiutiamo l'ipotesi nulla



Verifica di Ipotesi sulla Media (σ non nota)

- Convertire il risultato campionario ($\bar{x}$) in una statistica test T

Verifica di Ipotesi su μ

- σ nota
- σ non nota

Consideriamo il test

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu > \mu_0$$

(Assumiamo che la popolazione abbia distribuzione normale)

La regola di decisione è:

$$\text{Rifiutare } H_0 \text{ se } t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} > t_{n-1,\alpha}$$

Verifica di Ipotesi sulla Media (σ non nota)

(continuazione)

- Per un test bilaterale:

Consideriamo il test

$$\boxed{\begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{array}}$$

(Assumiamo che la popolazione abbia distribuzione normale e la varianza della popolazione non sia nota)

La regola di decisione è:

$$\text{Rifiutare } H_0 \text{ se } \boxed{t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} < -t_{n\text{-}1,\,\alpha/2}} \text{ o se } \boxed{t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} > t_{n\text{-}1,\,\alpha/2}}$$

Esempio: Test Bilaterale (σ non nota)

Si vuole verificare se il costo medio di una camera di hotel a New York sia pari a $168 per notte. Un campione casuale di 25 hotel ha determinato $\bar{x}$ = $172.50 e s = $15.40. Verificare l'ipotesi ad un livello α = 0.05. (Assumiamo che la popolazione abbia distribuzione normale)

H_0: $\mu = 168$

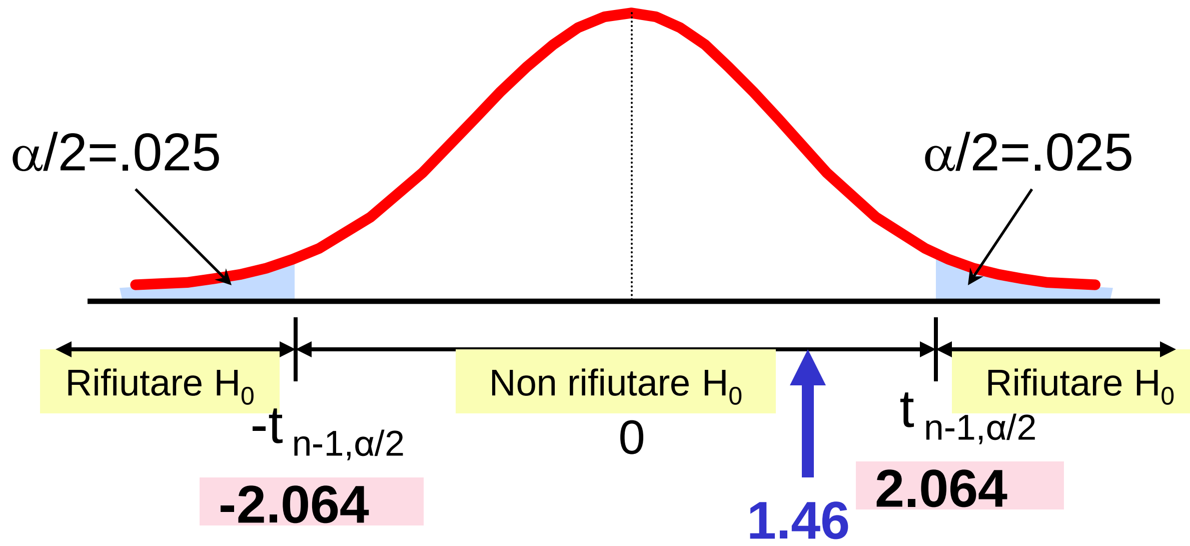
H_1: $\mu \neq 168$

Esempio: Test Bilaterale (Soluzione)

H_0: μ = 168
H_1: μ ≠ 168

- **α = 0.05**
- ***n* = 25**
- **σ non è nota, quindi usiamo la statistica T**
- **Valore Critico:**

$t_{24\,,\,.025} = \pm\, 2.064$



$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{172.50 - 168}{\frac{15.40}{\sqrt{25}}} = 1.46$$

Non rifiutare H_0: non ci sono sufficienti evidenze che il costo medio differisca da $168

Verifica di Ipotesi sulla Proporzione della Popolazione

- Riguarda variabili categoriche
- Due possibili risultati
  - "Successo" (una certa caratteristica è presente)
  - "Insuccesso" (la caratteristica non è presente)
- La frazione o proporzione della popolazione nella categoria dei "successi" è indicata con p
- Assumiamo che il campione sia grande

Verifica di Ipotesi sulla Proporzione della Popolazione

(continuazione)

- La proporzione campionaria di successi viene indicata con $\hat{P}$

$$\hat{P} = \frac{X}{n} = \frac{\text{numero di successi nel campione}}{\text{dimensione del campione}}$$

- Se n è sufficientemente grande da poter ritenere ragionevole che *np*(1 – *p*) > 9, la distribuzione di $\hat{P}$ può essere approssimata con una distribuzione normale con media e deviazione standard
  - $\mu_{\hat{P}} = p$ $\qquad$ $\sigma_{\hat{P}} = \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$

Verifica di Ipotesi sulla Proporzione della Popolazione

- La distribuzione campionaria di $\hat{P}$ è approssimativamente normale, quindi usiamo la statistica test *Z*:

$$Z = \frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1 - p_0)}{n}}}$$

Verifica di Ipotesi su p

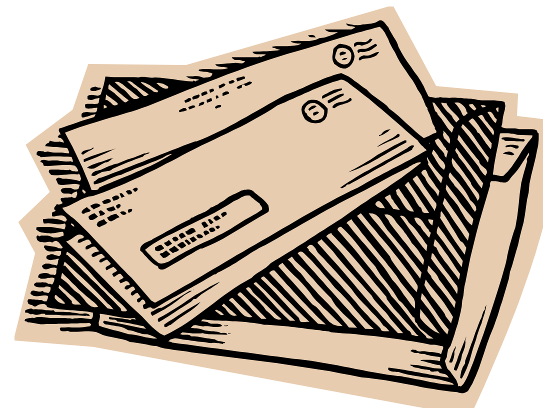
***np*(1 – *p*) > 9**

***np*(1 – *p*) < 9**

Non discusso in questo capitolo

Esempio: Test Z sulla Proporzione

Una società di marketing afferma che il tasso di risposta ai questionari inviati per posta è pari all'8%. Per verificare questa ipotesi si considera un campione aleatorio di 500 clienti e si ottengono 25 risposte. Verificare l'ipotesi ad un livello $\alpha = .05$.



Verifica:

La nostra approssimazione per p è

$$\hat{p} = 25/500 = .05$$

$$np(1 - p) = (500)(.05)(.95) = 23.75 > 9$$

✓

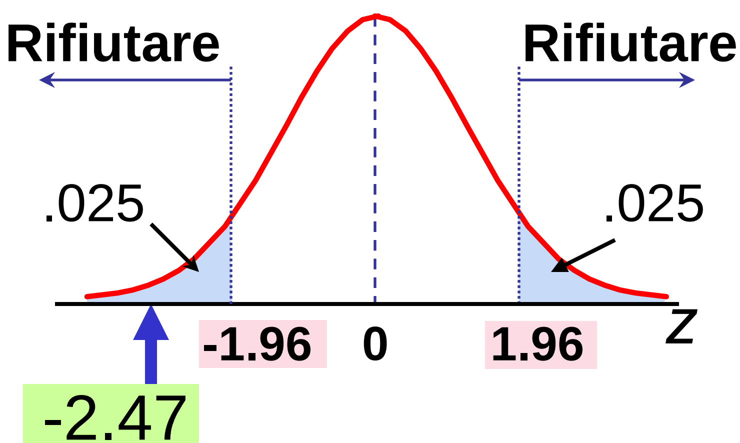
Test Z sulla Proporzione: Soluzione

H_0: p = .08
H_1: $p \neq$ .08

α = .05

n = 500, $\hat{p}$ = .05

Valori Critici: ± 1.96



Statistica Test:

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{.05 - .08}{\sqrt{\frac{.08(1-.08)}{500}}} = -2.47$$

Decisione:

Rifiutare H_0 a livello α = .05

Conclusione:

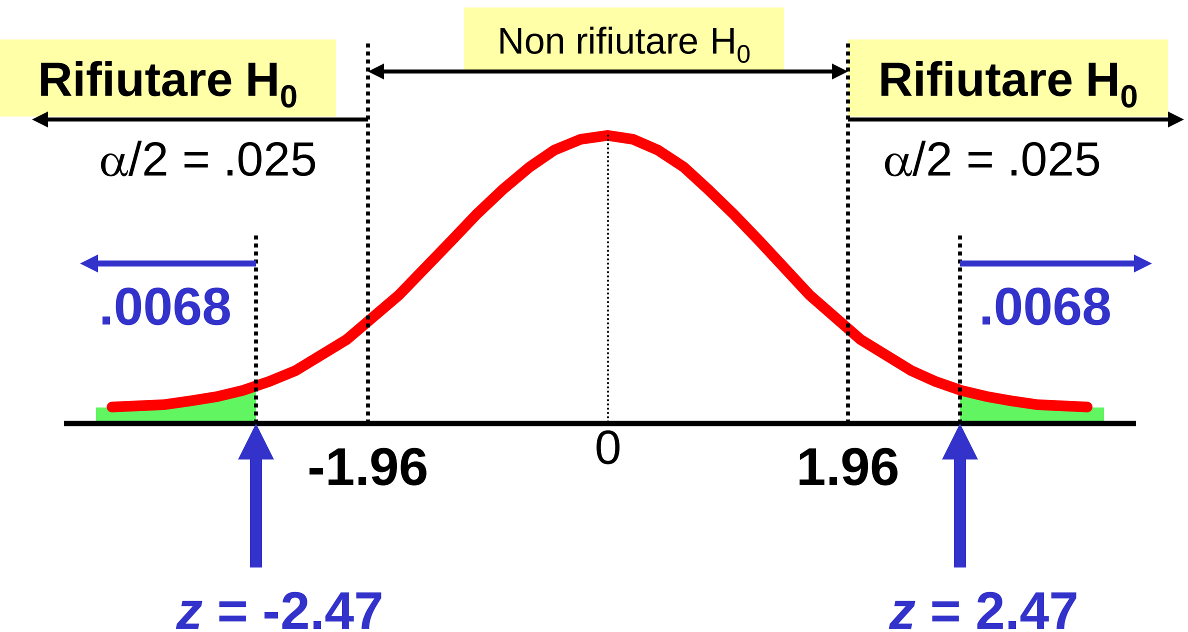
Ci sono sufficienti evidenze per rifiutare l'ipotesi che il tasso di risposta sia 8%.

Soluzione con il p-value

(continuazione)

Calcolare il p-value e confrontarlo con α

(Per un test bilaterale il p-value è sempre a due code)

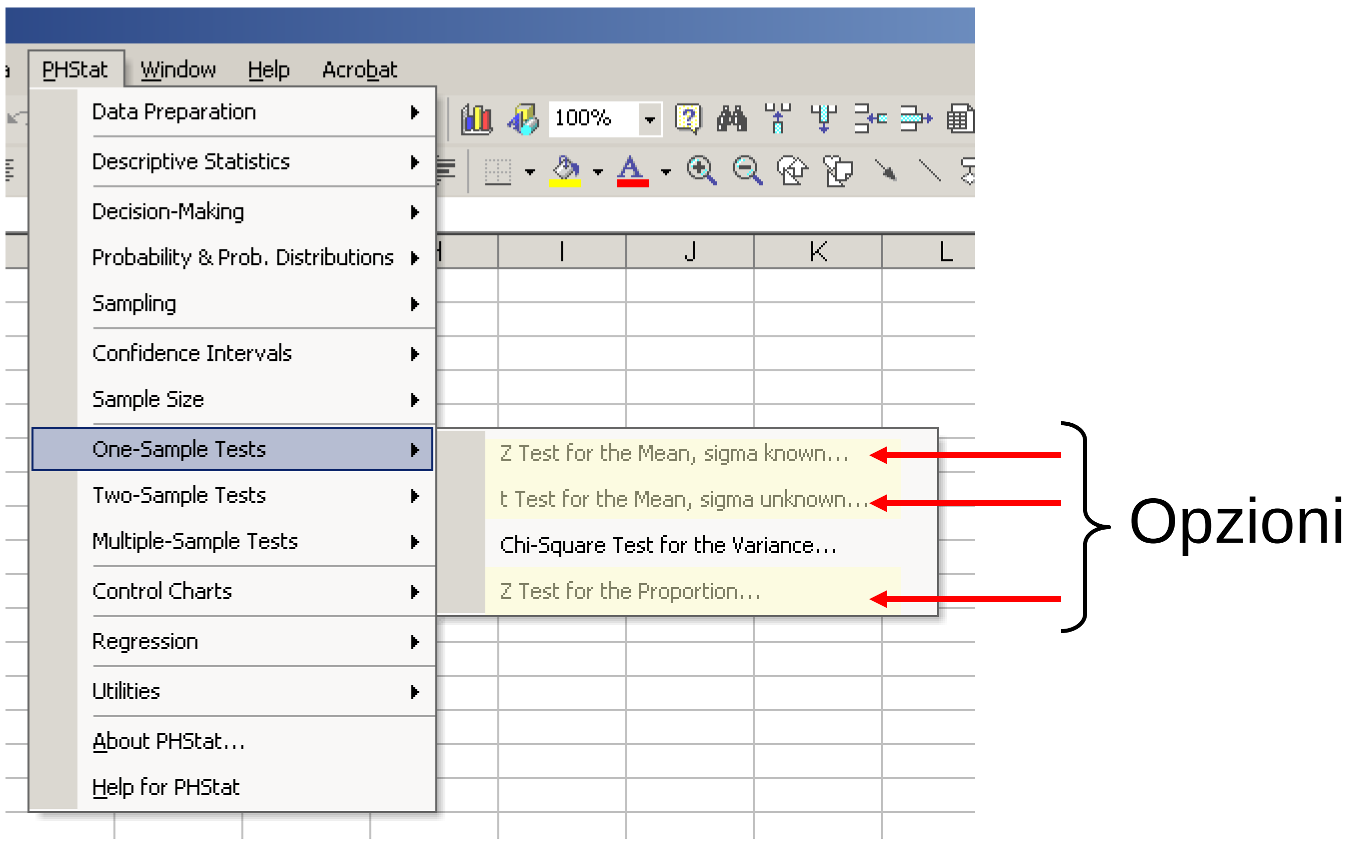


p-value = .0136:

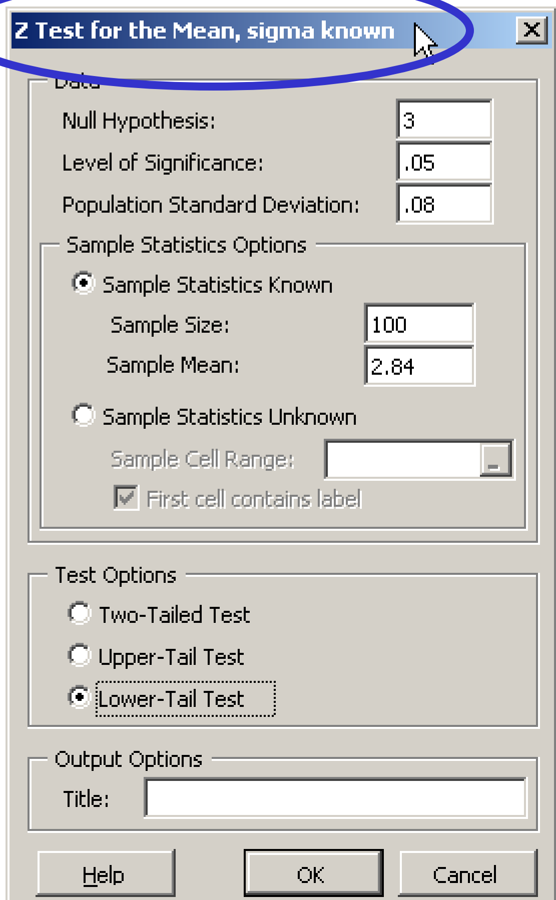
$$P(Z \le -2.47) + P(Z \ge 2.47)$$
$$= 2(.0068) = 0.0136$$

Rifiutare H_0 siccome il p-value = .0136 < α = .05

Uso di PHStat



Output PHStat



	A	B
1	**Z Test of Hypothesis for the Mean**	
2		
3	**Data**	
4	**Null Hypothesis**	**3**
5	**Level of Significance**	**0.05**
6	**Population Standard Deviation**	**0.8**
7	**Sample Size**	**100**
8	**Sample Mean**	**2.84**
9		
10	Intermediate Calculations	
11	Standard Error of the Mean	0.08
12	Z Test Statistic	-2
13		
14	**Lower-Tail Test**	
15	**Lower Critical Value**	**-1.644853476**
16	***p*-Value**	**0.022750062**
17	**Reject the null hypothesis**	
18		

Input

Output

Potenza di un Test

- Ricordare i possibili risultati della verifica di ipotesi:

Legenda:
Risultato
(Probabilità)

	Stato di Natura	
Decisione	H_0 Vera	H_0 Falsa
Non Rifiutare H_0	**Decisione corretta** **($1 - \alpha$)**	**Errore di Secondo Tipo** **(β)**
Rifiutare H_0	**Errore di Primo Tipo** **(α)**	**Decisione corretta** **($1 - \beta$)**

- β rappresenta la probabilità dell'errore di secondo tipo
- $1 - \beta$ è definito come la potenza del test

Potenza = $1 - \beta$ = probabilità che un'ipotesi nulla falsa venga rifiutata

Errore di Secondo Tipo

Assumiamo che la popolazione abbia distribuzione normale e la varianza della popolazione sia nota. Consideriamo il sistema di ipotesi

$$H_0: \mu = \mu_0$$
$$H_1: \mu > \mu_0$$

La regola di decisione è:

$$\text{Rifiutare } H_0 \text{ se } z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} > z_\alpha$$

o

$$\text{Rifiutare } H_0 \text{ se } \bar{x} > \bar{x}_c = \mu_0 + z_\alpha \sigma / \sqrt{n}$$

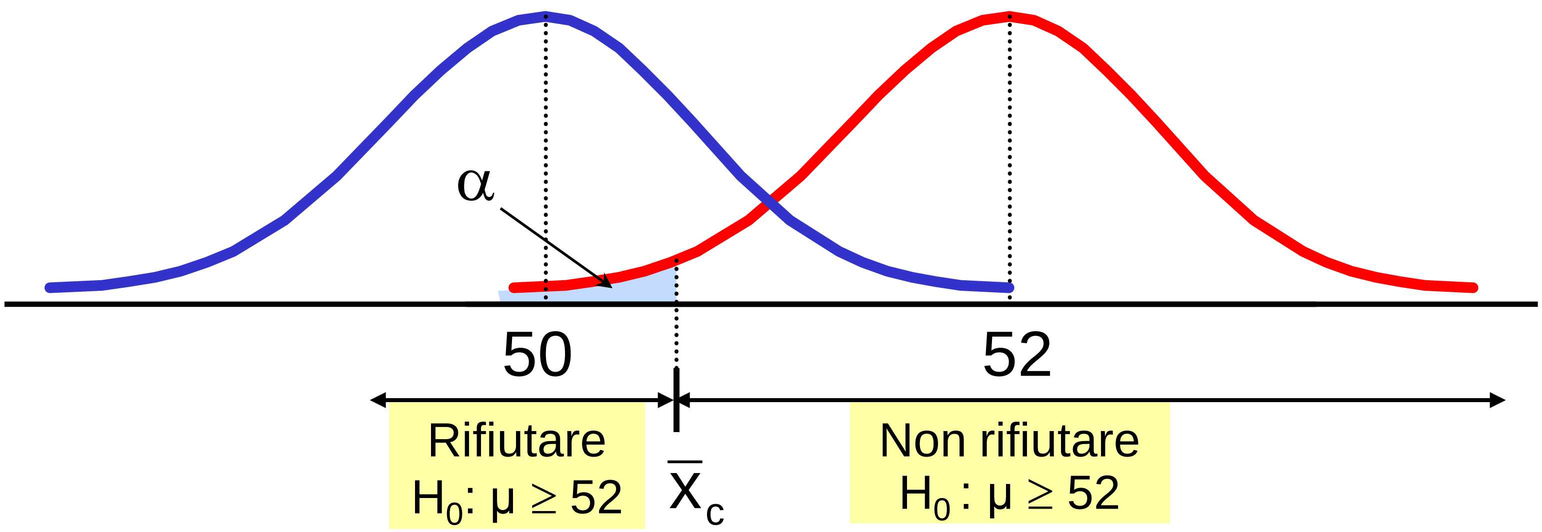
Se l'ipotesi nulla è falsa e la vera media è μ* (μ* > μ_0), allora la probabilità dell'errore di secondo tipo è

$$\beta = P(\bar{X} \leq \bar{x}_c \mid \mu = \mu^*) = P\left(Z \leq \frac{\bar{x}_c - \mu^*}{\sigma / \sqrt{n}} \right)$$

Esempio: Errore di Secondo Tipo

- L'errore di secondo tipo corrisponde alla probabilità di non rifiutare una H_0 falsa

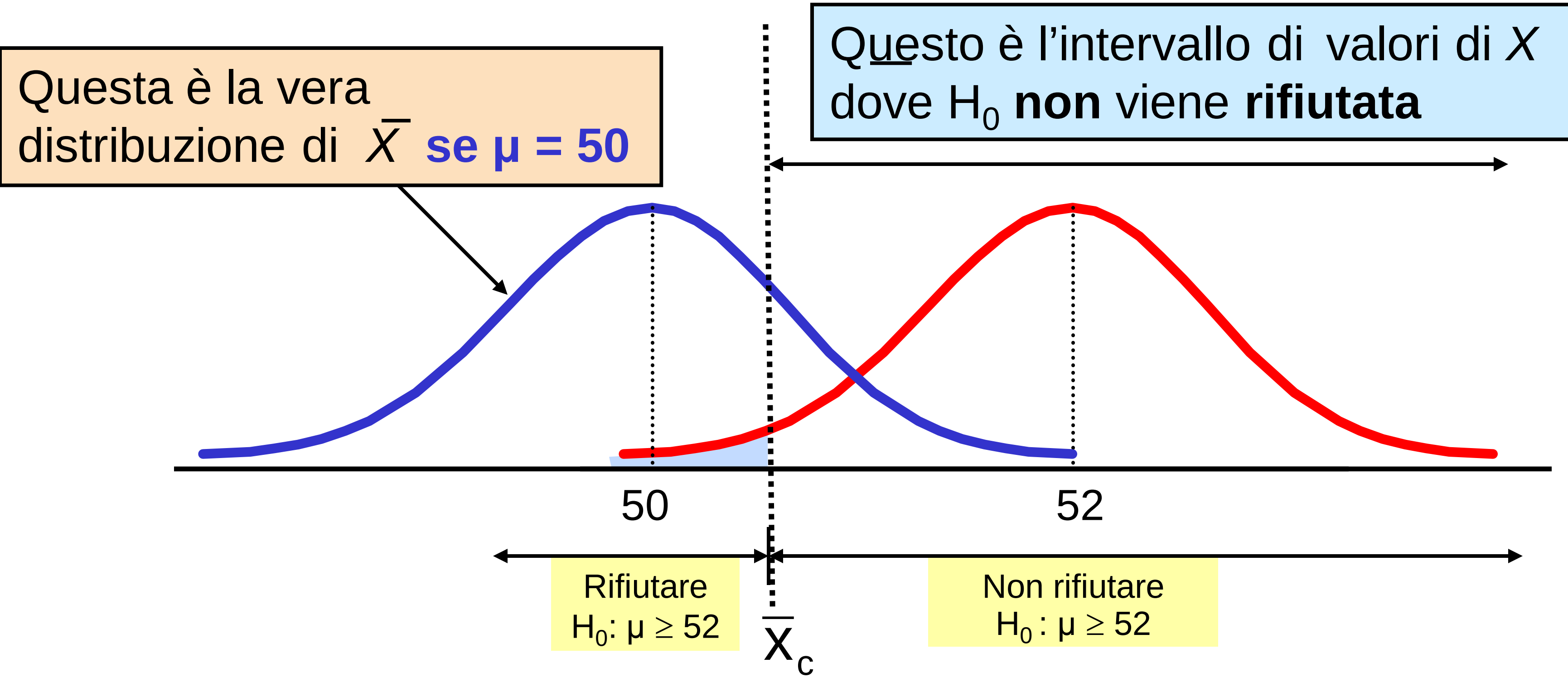
Supponiamo che **H_0: $\mu \geq 52$** non venga rifiutata quando invece la vera media è **$\mu^* = 50$**



Esempio: Errore di Secondo Tipo

(continuazione)

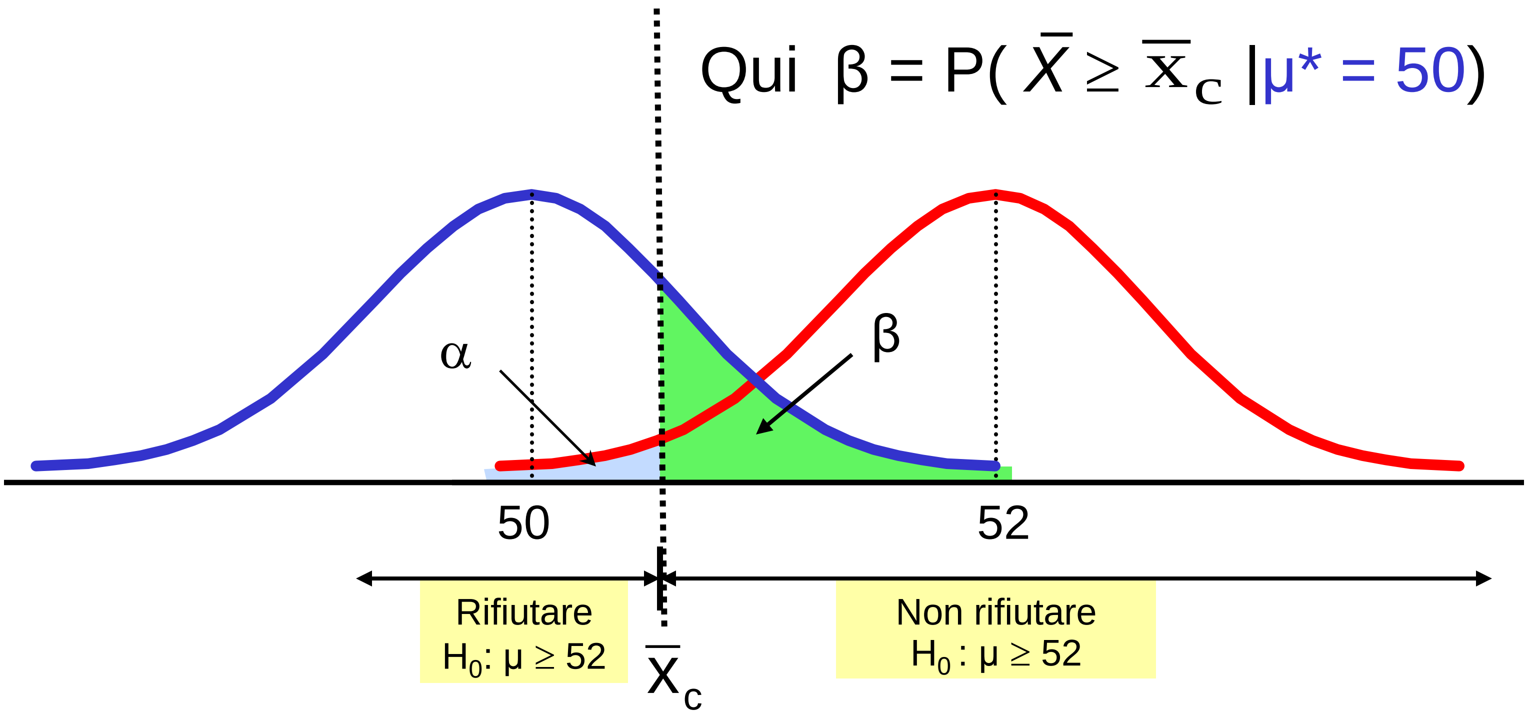
- Supponiamo che H_0: $\mu \geq 52$ non venga rifiutata quando invece la vera media è $\mu^* = 50$



Esempio: Errore di Secondo Tipo

(continuazione)

- Supponiamo che H_0: $\mu \geq 52$ non venga rifiutata quando invece la vera media è $\mu^* = 50$



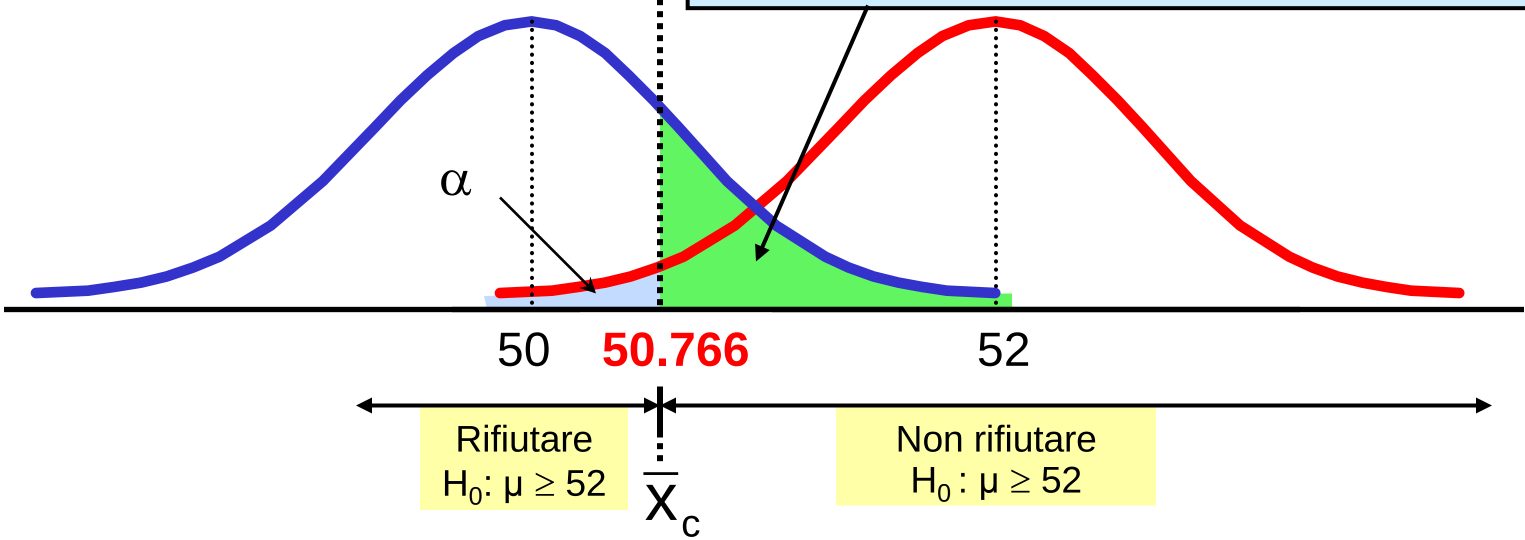
Calcolo di β

- Supponiamo n = 64 , σ = 6 , e α = .05

$$\bar{x}_c = \mu_0 - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 52 - 1.645 \frac{6}{\sqrt{64}} = \boxed{50.766}$$

(per $H_0 : \mu \geq 52$)

Quindi β = P($\bar{X} \geq 50.766 \mid \mu^*=50$)



Calcolo di β

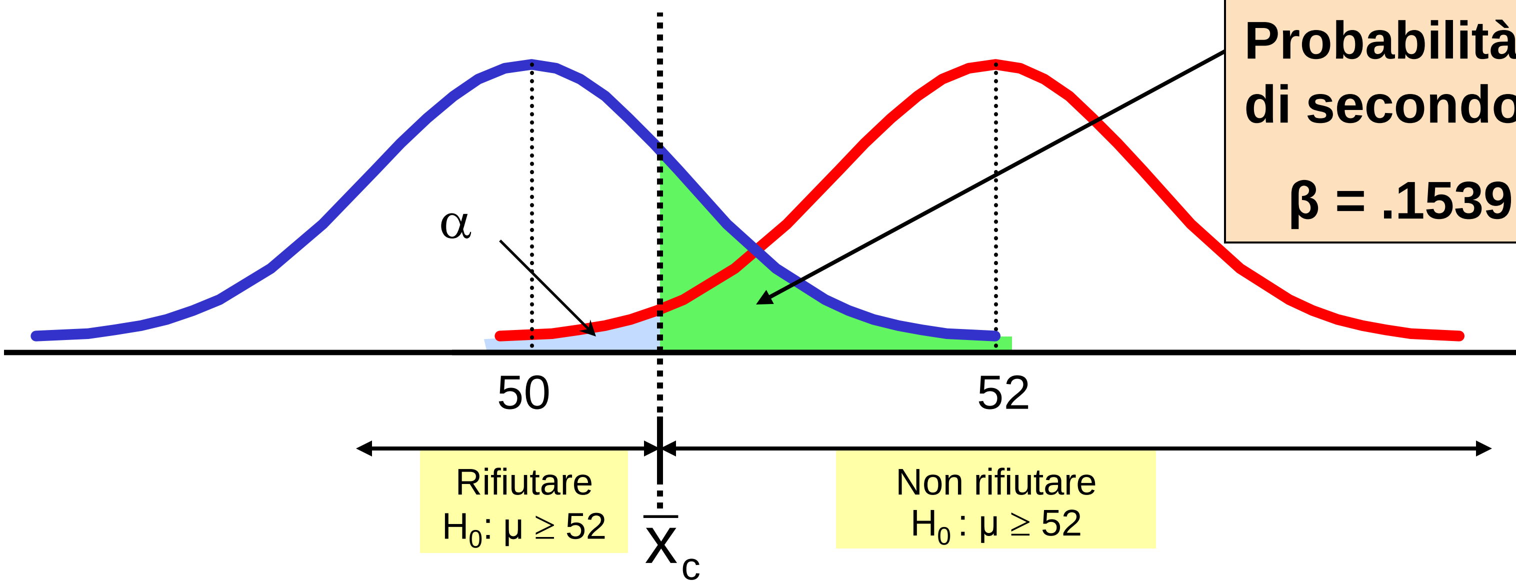
(continuazione)

- Supponiamo n = 64 , σ = 6 , e α = .05

$$P(\overline{X} \ge 50.766 \mid \mu^* = 50) = P\left(Z \ge \frac{50.766 - 50}{6/\sqrt{64}} \right) = P(Z \ge 1.02) = 1 - .8461 = \boxed{.1539}$$

Probabilità errore di secondo tipo:

β = .1539



Esempio: Potenza di un Test

Se la vera media è $\mu^* = 50$,

- Probabilità dell'Errore di Secondo Tipo (β) = .1539
- Potenza del test = $1 - \beta = 1 - .1539 = 0.8461$

Legenda:
Risultato
(Probabilità)

	Stato di Natura	
Decisione	H_0 Vera	H_0 Falsa
Non Rifiutare H_0	**Decisione corretta** **$1 - \alpha = 0.95$**	**Errore di Secondo Tipo** **$\beta = 0.1539$**
Rifiutare H_0	**Errore di Primo Tipo** **$\alpha = 0.05$**	**Decisione corretta** **$1 - \beta = 0.8461$**

(Il valore di β e la potenza saranno diversi per diversi valori di μ^*)

Riepilogo del Capitolo

- Discussa la metodologia della verifica di ipotesi
- Eseguito il test Z sulla media (σ nota)
- Discussi gli approcci del valore critico e del p-value alla verifica di ipotesi
- Eseguiti test unilaterali e bilaterali
- Eseguito il test T sulla media (σ non nota)
- Eseguito il test Z sulla proporzione
- Discussi errore di secondo tipo e potenza del test